

Struktura liczb pierwszych

Cztery filary: eliminacja, gęstość, rezonans, fala

Flamandzki Artur

09.04.2025

Spis treści

Przewodnik po dokumencie	6
Przedmowa – Nota historyczna	8
Skorowidz terminów	9
Przestrzeń liczb naturalnych	11
Przestrzeń strukturalna	15
Arytmetyka strukturalna	28
Wizualizacja pojęcia pierwszości	49
Filar 1: Strukturalna Konstrukcja Pierwszości poprzez Eliminację i Kongruencyjne Nakładanie	51
1.1 Pierwszość jako pozostałość po eliminacji złożoności	51
1.1.1 Wprowadzenie	51
1.1.2 Definicja: Zbiór eliminacyjny	52
1.1.3 Definicja: Zbiór przetrwały	52
1.2 Zakres $2P_{\max}$ jako deterministyczna granica wykrywania pierwszości	52
1.2.1 Kombinatoryczna konieczność istnienia przetrwałych	53
1.2.2 Integralność systemu eliminacyjnego	53
1.2.3 Arytmetyczne sito a strukturalny etap eliminacyjny	54
1.2.4 Granica $2P_{\max}$ jako warunek geometryczny	58
1.2.5 Hiperbola jako geometria złożoności	58
1.2.6 Zgodność z klasycznym twierdzeniem Bertranda–Czebyszewa	60
1.2.7 Zastosowanie granicy $2P_{\max}$: lokalno–addytywne ujęcie hipotezy Goldbacha	61
1.3 Mechanizm autobalansu w konstrukcjach eliminacyjno–addytywnych	65
1.3.1 Związek przesunięcia okna z ogonami różnic	65

1.3.2	Stabilizacja zgrubna jako liniowy wzrost ogonów	66
1.3.3	Stabilizacja precyzyjna przez przeplatanie sunsetów	66
1.3.4	Rezonanse jako efekt kolizji ogonów	67
1.3.5	Definicja formalna autobalansu	67
1.3.6	Twierdzenie: autobalans jest zawsze skończony	67
1.3.7	Wniosek: autobalans jako deterministyczny mechanizm domknięcia	68
1.4	Zjawisko interferencji w zbiorze liczb pierwszych	70
1.4.1	Wzorce eliminacyjne i ich nakładanie	70
1.4.2	Wzorce eliminacyjne jako niezależne cykle kongruencyjne	71
1.4.3	Zasada interferencji eliminacyjnej	71
1.4.4	Wniosek: Interferencja jako mechanizm ewolucji wzorca	72
1.4.5	Interferencja wzorców eliminacji	73
1.4.6	Twierdzenie (Interferencja przez układ kongruencji)	73
1.4.7	Twierdzenie 1 (Most relacyjny między strukturą a pierwszością)	74
1.4.8	Wniosek końcowy	75
1.4.9	Typy interferencji: konstruktywne i destrukcyjne	75
1.4.10	Tożsamość zbioru liczb pierwszych	76
1.4.11	Rozszerzanie wzorca i domknięcie zbioru eliminacyjnego	76
1.4.12	Załącznik: Macierz eliminacji dla liczb od 1 do 23	77
1.4.13	Formalizacja algorytmiczna procesu eliminacyjnego	77
1.4.14	Interpretacja operatora kongruencji i strukturalne znaczenie eliminacji	79
1.4.15	Wniosek końcowy: pierwszość jako konieczność strukturalna	79
1.4.16	Złożoność strukturalna	79
1.4.17	Dalsze kierunki badań	80
1.5	Strukturalne ujęcie pierwszości	82
1.5.1	Operacje	82
1.5.2	System addytywny	82
1.5.3	System multiplikatywny i przeniesienie pierwszości	82
1.5.4	Izomorfizm	83
1.5.5	Pierwszość	84
1.5.6	Wniosek	84
1.5.7	Rozszerzenie do wymiernych	84
1.5.8	Pierwszość w mianownikach	85
1.5.9	Interpretacja strukturalna	85
1.5.10	Wniosek	85
1.5.11	Interpretacja geometryczna	85
1.5.12	Twierdzenie końcowe: niezmienniczość pierwszości	86
1.5.13	Konkluzja	87
1.5.14	Uwaga historyczna	87
Filar 2: Gęstość liczb pierwszych		89
2.1	Wprowadzenie	89
2.2	Definicja gęstości przez filtrację	89
2.3	Przykład	89
2.4	Konstrukcyjny wzór gęstości jako równoważnik klasycznego przybliżenia	90

2.5	Klasyczne ujęcie gęstości – Twierdzenie Mertensa	91
2.6	Porównanie podejść do wyznaczania gęstości	92
2.7	Genealogia liczb pierwszych	95
2.7.1	Idea	95
2.7.2	Budowa w przód	95
2.7.3	Rekonstrukcja w tył	95
2.7.4	Przykład	95
2.8	Formalizacja genealogii liczb pierwszych	96
2.8.1	Definicja: genealogia lokalna i domknięta	96
2.8.2	Twierdzenie (odzysk wszystkich wcześniejszych pierwszych dla $T = 2p_i$)	96
2.8.3	Uwagi	96
2.8.4	Przykłady	97
2.9	Faktoryzacja klasyczna i genealogiczna	97
2.9.1	Faktoryzacja klasyczna	97
2.9.2	Faktoryzacja genealogiczna	97
2.9.3	Twierdzenie o domknięciu	98
2.9.4	Interpretacja	98
2.9.5	Kontrast	98
2.9.6	Filozofia	98
2.10	Implikacje formalne i semantyczne	98
2.11	Rozkład przez podział przestrzeni	100
2.11.1	Przestrzeń i miara	100
2.11.2	Źródła i okno konstrukcyjne	100
2.11.3	Operator podziału przestrzeni	101
2.11.4	Rekursja i zamknięta postać	101
2.11.5	Twierdzenie o wyłanianiu nowego źródła	102
2.11.6	Interpretacja przestrzenna	102
2.11.7	Przykład strukturalny: równanie $m^2 - n^2 = 15$	102
Filar 3: Spektralna Projektja Struktury Liczb Pierwszych		105
3.1	Wprowadzenie	105
3.2	Operator harmoniczny rytmu eliminacyjnego	105
3.2.1	Definicja	105
3.2.2	Interpretacja amplitudy	107
3.2.3	Warunek równowagi amplitudowej	107
3.2.4	Interferencja i minima amplitudy	107
3.2.5	Zbieżność do zer funkcji dzeta	107
3.2.6	Znaczenie strukturalne	108
3.3	Wzorcowa suma Dirichleta jako projekcja rytmu eliminacyjnego	108
3.4	Wzorcowa suma Dirichleta i jej projekcja	108
3.4.1	Definicja sumy wzorcowej	108
3.4.2	Interpretacja interferencyjna	109
3.4.3	Suma Dirichleta na okresie LCM	109
3.4.4	Jednokierunkowość transformacji	110
3.4.5	Diagram przepływu informacji strukturalnej	112

3.4.6	Przykłady numeryczne	114
3.5	Strukturalna funkcja dzeta	116
3.5.1	Jednostka siatki $U(t)$	116
3.5.2	Wizualizacja jednostki siatki	116
3.5.3	Strukturalna zgodność z rygiem liczbowym	117
3.6	Różnice $\pi(x) - Li(x)$ oraz $\pi(x) - R(x)$	117
3.6.1	Interpretacja strukturalna	117
3.6.2	Wizualizacja różnic	118
3.6.3	Strukturalna tożsamość oscylacji	118
3.7	Wniosek strukturalny	118
3.7.1	Formalna struktura jednostki siatki $U(t)$ i dzety strukturalnej	119
3.7.2	Powiązanie z Filarami 1–2: diagram strukturalny	122
3.8	Aksjomatyka dzety strukturalnej	123
3.8.1	Aksjomaty eliminacyjne	123
3.8.2	Aksjomaty harmoniczne	124
3.8.3	Aksjomat definicyjny	124
3.8.4	Aksjomat odczytu	124
3.9	Ciąg twierdzeń prowadzących do strukturalnej postaci RH	124
3.9.1	Krok I: wyrównanie wag	124
3.9.2	Krok II: zamykanie wielokąta fazowego	124
3.9.3	Krok III: minimum amplitudy	125
3.9.4	Krok IV: graniczne pokrycie zer	125
3.9.5	Krok V: strukturalna wersja RH	125
3.10	Dzeta analityczna kontra dzeta strukturalna	125
3.10.1	Dzeta analityczna	125
3.10.2	Dzeta strukturalna	126
3.10.3	Porównanie	126
3.10.4	Konkluzja	126
3.11	Strukturalne twierdzenie o zamknięciu wielokąta fazowego	126
3.11.1	Ustawienie geometryczne	126
3.11.2	Warunek wyrównania amplitud	127
3.11.3	Warunek fazowy i zamknięcie	127
3.11.4	Twierdzenie strukturalne o zamknięciu	128
3.12	Zgodność z dowolnym wzorcem i rozszerzalność	129
3.12.1	Dynamika eliminacyjna jako układ o złożoności emergentnej	129
3.12.2	Podsumowanie filaru	129

Filar 4: Model falowy liczb pierwszych **131**

4.1	Wprowadzenie: od cyklu do fali	131
4.1.1	Formalizacja: fala eliminacyjna jako funkcja czasu	131
4.1.2	Definicja: Cykl eliminacyjny liczby pierwszej	131
4.1.3	Definicja: Rotacja cyklu w czasie	131
4.1.4	Definicja: Bitowy sygnał pozycji	131
4.1.5	Definicja: Fala złożona z wielu liczb pierwszych	132
4.1.6	Definicja: Macierz amplitudy falowej	132

4.1.7	Interpretacja	132
4.1.8	Model geometryczny: amplituda fali eliminacyjnej	132
4.1.9	Wizualizacja macierzy $\mathcal{F}(t, i)$	132
4.1.10	Animacja jako narzędzie badawcze	133
4.1.11	Interpretacja geometryczna	133
4.1.12	Fala jako forma arytmetyki	133
4.1.13	Powiązanie z wcześniejszymi filarami	134
4.1.14	Związek z Filarem 1: Eliminacja cykliczna	134
4.1.15	Związek z Filarem 2: Gęstość liczb pierwszych	134
4.1.16	Związek z Filarem 3: Interferencja i operator harmoniczny	134
4.1.17	Wniosek	135
4.2	Wprowadzenie geometryczne fali	135
4.2.1	Definicje podstawowe	135
4.2.2	Definicja: Zbiór źródłowy	135
4.2.3	Definicja: Zakres przesunięcia i okno lokalne	135
4.2.4	Definicja: Funkcja rezonansowa i powierzchnia harmoniczna	135
4.2.5	Definicja: Funkcja rezonansowa zbiorcza	136
4.2.6	Definicja: Transformacja przesunięcia	136
4.2.7	Definicja: Funkcja powierzchni rezonansowej	136
4.2.8	Interpretacja geometryczna	136
4.2.9	Twierdzenie: Rezonansowa granica zbioru P ($2P_{\max}$)	136
4.2.10	Wizualizacja rezonansu geometrycznego	137
Cztery filary porządku liczbowego — pełna struktura		139
5.1	Filar I: Eliminacja kongruencyjna	139
5.2	Filar II: Gęstość przetrwałych	139
5.3	Filar III: Interferencja wzorców	139
5.4	Filar IV: Fala eliminacyjna	139
5.5	Struktura zamknięta i samopodtrzymująca	139
5.6	Wniosek końcowy	140
Zakończenie		141
6.1	Zamknięcie struktury i konsekwencje relacyjnej genezy	141
6.2	Konsekwencje metodologiczne	142
6.3	Nota o Michaelu Atiyahu (1929–2019)	144
Bibliografia		144

Przewodnik po dokumencie

Niniejszy dokument składa się z czterech głównych filarów oraz warstw wprowadzających, które stopniowo przechodzą od klasycznej przestrzeni liczb do pełnej relacyjnej struktury pierwszości. Poniższy przewodnik ma pomóc w nawigacji, lekturze i rozumieniu kolejności idei.

Jak czytać dokument

- Jeśli chcesz zobaczyć jedynie konstrukcję pierwszości – przejdź od razu do [Filara 1](#).
- Jeśli chcesz zrozumieć gęstość, genealogie i strukturę przetrwałych – zacznij w [Filarze 2](#).
- Jeśli interesuje cię aspekt harmoniczny, widmo eliminacji i zgodność z funkcją dzeta – przejdź do [Filara 3](#).
- Jeśli interesuje cię model falowy, ciągła dynamika i geometryczna interpretacja – idź do [Filara 4](#).
- Jeśli chcesz zobaczyć całość jako jedną zamkniętą strukturę – przejdź na koniec do „[Cztery filary porządku liczbowego – pełna struktura](#)”.

Struktura dokumentu

Przedmowa Krótka nota historyczna pokazująca, skąd biorą się intuicje i pytania, które doprowadziły do modelu strukturalnego.

Skorowidz terminów Zbiór najważniejszych pojęć wprowadzonych w pracy. Warto tu zajrzeć w trakcie lektury.

Przestrzeń liczb naturalnych Wprowadzenie do klasycznej przestrzeni arytmetycznej, potrzebne, aby jasno pokazać, co ulega uogólnieniu w przestrzeni strukturalnej.

Przestrzeń strukturalna Pierwsze pełne przedstawienie przestrzeni relacji, w której definicje nie odwołują się do wartości liczbowych, lecz do cykli i wielokrotności. Rozdział wyjaśnia fundamentalne założenia przejścia z wartości na strukturę.

Arytmetyka strukturalna Operacyjne zasady działania w przestrzeni strukturalnej: wielokrotności, eliminacja, źródła, pojawienie się pierwszych. Z tego miejsca zaczyna się tłumaczenie, dlaczego klasyczna arytmetyka jest jedynie etykietą zewnętrzną.

Wizualizacja pojęcia pierwszości Zbiór graficznych przykładów i animacyjnych analogii, które pokazują, jak działają cykle, uderzenia i interferencje bez potrzeby odwoływania się do liczb.

Cztery filary

Filar 1: Eliminacja i kongruencyjne nakładanie Najbardziej konstrukcyjny rozdział dokumentu. Pokazuje:

- jak powstaje pierwszość przez eliminację złożoności,
- jak wygląda pełny mechanizm nakładania wzorców kongruencyjnych,
- dlaczego granica $2P_{\max}$ jest deterministyczna,
- jak powstaje lokalno-addytywne ujęcie hipotezy Goldbacha.

Jeśli szukasz fundamentu całej teorii, to jest właśnie tutaj.

Filar 2: Gęstość liczb pierwszych Rozdział pokazuje, że gęstość jest konsekwencją filtracji wzorców eliminacyjnych. Wprowadza genealogie i operator podziału przestrzeni. Pokazuje zgodność konstrukcyjną z twierdzeniami klasycznymi.

Filar 3: Spektralna projekcja struktury Analiza harmoniczna rytmu eliminacyjnego: operator harmoniczny, suma wzorcowa Dirichleta, zgodność z zerami funkcji dzeta. Tu pojawia się relacyjny odpowiednik analitycznej RH.

Filar 4: Model falowy liczb pierwszych Uogólnienie cykli do fal, analizowanych w czasie i fazie. Rozdział łączy poprzednie trzy filary w jedno zjawisko dynamiczne.

Cztery filary porządku liczbowego — pełna struktura Synteza. Pokazuje, jak eliminacja, gęstość, interferencja i fala tworzą jeden spójny, zamknięty system relacyjny.

Przedmowa – Nota historyczna

Rozważania nad liczbami pierwszymi sięgają starożytności. Już Euklides, w *Elementach* (ok. 300 p.n.e.), dowiódł, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony. W III wieku p.n.e. Eratostenes z Cyreny opracował klasyczne *sito Eratostenesa* — algorytm iteracyjnego usuwania wielokrotności liczb pierwszych w celu ich wyłonienia.

W kolejnych wiekach teoria liczb rozwijała się w kierunku analitycznym. Liczby pierwsze zaczęto traktować statystycznie, badając ich rozmieszczenie za pomocą funkcji takich jak funkcja liczby liczb pierwszych $\pi(x)$ oraz asymptotycznych zależności w rodzaju $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ (Gauss, Legendre, Riemann).

Jednak żadna z tych metod nie dawała konstruktywnej odpowiedzi na pytanie: *dlaczego* liczby pierwsze są rozmieszczone właśnie w taki sposób.

Niniejsza praca podejmuje próbę ujęcia pierwszości w sensie strukturalnym, a nie wartościowym. Punktem wyjścia są klasyczne twierdzenia i narzędzia teorii liczb, traktowane jednak wyłącznie jako etap przejściowy w kierunku bardziej ogólnej analizy. Pierwszość zostaje rozpatrzona jako własność wynikająca z relacji i struktur eliminacyjnych, które zachowują zgodność z definicją liczb pierwszych w przestrzeni liczbowej, a jednocześnie pozwalają rozszerzyć analizę na szersze układy relacyjne i strukturalne.

Od tego równania wszystko się zaczęło. Z pozornie banalnej sumy testów podzielności narodził się pomysł, że pierwszość może być zjawiskiem strukturalnym, a nie własnością liczby.

$$L \in P \iff \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq \sqrt{L}}} [[p \mid L]] = 0$$

Skorowidz terminów

- **Wzorzec eliminacyjny (wzorzec kongruencyjny)** – układ zależności określający, które liczby pozostają po zastosowaniu eliminacji względem znanych liczb pierwszych. Odpowiada rodzinie kongruencji

$$n \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{dla każdego } p \in P,$$

gdzie P oznacza zbiór istniejących liczb pierwszych.

- **Cykl eliminacyjny (okres kongruencyjny)** – powtarzalna struktura oparta na najmniejszej wspólnej wielokrotności $\text{lcm}(P)$, będącej iloczynem elementów zbioru P , ponieważ dla liczb pierwszych $\text{lcm}(P) = \prod_{p \in P} p$. W tej strukturze proces eliminacji i przetrwania liczb układu się w periodyczny wzorzec kongruencyjny. Stanowi analog klas reszt modulo $\text{lcm}(P)$ i wyznacza minimalną jednostkę powtarzalności danego wzorca.
- **Głoska (element słupka binarnego)** – pojedynczy bit (cyfra binarna) w cyklicznym wzorcu eliminacyjnym. Reprezentuje pozycję liczby w cyklu, przy czym każda liczba pierwsza p jest odwzorowana jako wektor binarny długości p z jedynką na pierwszej pozycji i zerami w pozostałych.

Przykład: liczba pierwsza $p = 5$ jest reprezentowana jako słupek $(1, 0, 0, 0, 0)$, a każda z cyfr tego słupka to *głoska*. W trakcie działania algorytmu słupek podlega cyklicznej rotacji, a eliminacja liczby następuje wtedy, gdy aktualna głoska ma wartość 1, co odpowiada wystąpieniu wielokrotności liczby pierwszej.

Uwaga: Choć podział liczby pierwszej na głoski ma charakter konstrukcyjny, stanowi podstawowy element modelu algorytmicznego, umożliwiając operowanie na poziomie pojedynczych kroków (pozycji) w cyklu oraz efektywne, równoległe wykrywanie eliminacji.

- **Efekt konstruktywny (stabilizacja pozycji przetrwałych)** – zjawisko, w którym nakładanie kolejnych wzorców eliminacyjnych prowadzi do zwiększenia liczby pozycji nieeliminowanych. Formalnie odpowiada wzrostowi liczby wspólnych rozwiązań układu kongruencji.
- **Efekt destrukcyjny (redukcja pozycji przetrwałych)** – zjawisko, w którym wprowadzenie nowych warunków kongruencyjnych powoduje eliminację części wcześniej nieeliminowanych pozycji. Formalnie odpowiada zmniejszeniu liczby wspólnych rozwiązań układu kongruencji.
- **Rozszerzanie wzorca (iteracyjne uzupełnianie zbioru)** – proces dodawania do zbioru P nowych liczb pierwszych, które nie zostały wyeliminowane w danym zakresie. Formalnie odpowiada uzupełnianiu ciągu P o elementy względnie pierwsze względem wszystkich $p \in P$.

- **Granica komplementarności (strukturalna granica eliminacji)** – fundamentalna granica zakresu, w którym wzorec eliminacyjny zbudowany na bazie liczb pierwszych $P = \{p \leq P_{\max}\}$ jest w stanie wygenerować wszystkie liczby złożone w danym przedziale. Ma ona ogólną postać

$$P_{\min} \cdot P_{\max},$$

gdzie P_{\min} jest najmniejszą liczbą pierwszą w systemie (w praktyce 2), a P_{\max} największą liczbą pierwszą znaną na danym etapie procesu.

Znaczenie strukturalne: granica wynika z hiperbolicznej geometrii iloczynów pm oraz z zasady komplementarności rozkładu: aby wszystkie liczby w rozważanym zakresie mogły być złożone wyłącznie z czynników z bazy P , ich czynniki muszą zawierać się w przedziale od P_{\min} do P_{\max} . Prowadzi to do maksymalnej wartości $n = P_{\min}P_{\max}$, będącej konstrukcyjną granicą pełnego pokrycia.

Relacja z klasyczną formą twierdzenia typu Betrand: ponieważ w typowym układzie liczb pierwszych zawsze zachodzi $P_{\min} = 2$, granica ta przyjmuje postać

$$P_{\min}P_{\max} = 2P_{\max},$$

co zbiega się z klasyczną granicą znaną z twierdzenia typu Betrand. W niniejszym ujęciu stosowana forma $2P_{\max}$ jest więc jedynie szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej, strukturalnej zasady $P_{\min}P_{\max}$.

- **Interferencja wzorców eliminacyjnych (cykliczna kolizja wzorców)** – zjawisko powstające przy nakładaniu się dwóch lub więcej niezależnych wzorców eliminacyjnych o różnych okresach kongruencyjnych. Interferencja prowadzi do lokalnych przesunięć w układzie pozycji nieeliminowanych, powodując efekty konstruktywne lub destrukcyjne. Matematycznie zachodzi w punktach spełniających zależność:

$$n = k \cdot \text{lcm}(P_B) \pm m \cdot \text{lcm}(P_A), \quad k, m \in \mathbb{N},$$

gdzie $P_A, P_B \subset \mathbb{P}$ są zbiorami generującymi niezależne wzorce eliminacyjne.

Przestrzeń liczb naturalnych

Przestrzeń liczb naturalnych stanowi bazę wyjściową klasycznych pojęć i narzędzi teorii liczb. W niniejszym ujęciu jest ona rozpatrywana niezależnie od rozróżnienia na liczby pierwsze i złożone, ponieważ pojęcia te zostaną w dalszej części wchłonięte przez ogólniejszą przestrzeń strukturalną.

Przestrzeń liczb naturalnych można traktować jako szczególny przypadek przestrzeni o podstawie 1, w której relacje wartościowe wyznaczają tradycyjną arytmetyczną postać układu. Na tej bazie formułowane są aksjomaty opisujące jej wewnętrzną strukturę.

Aksjomat 0.1 (Źródła). Istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych większych od 1:

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}, \quad p_1 = 2,$$

taki, że żaden element p_k nie należy do zbiorów wielokrotności wcześniejszych źródeł:

$$p_k \notin \bigcup_{i < k} M_{p_i}, \quad M_p = \{k \cdot p : k \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór \mathcal{P} stanowi zbiór *źródeł* przestrzeni, a każdy element p_k generuje własną linię wielokrotności M_{p_k} .

Aksjomat 0.2 (Generacja przestrzeni). Każdy element przestrzeni liczb naturalnych większy niż 1 należy do jednej z linii wielokrotności źródeł:

$$\mathbb{N}_{>1} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} M_p.$$

Oznacza to, że przestrzeń jest w pełni generowana przez źródła \mathcal{P} oraz ich wielokrotności.

Aksjomat 0.3 (Relacje między źródłami). Przecięcia linii wielokrotności dwóch różnych źródeł wyznaczają punkty wspólne przestrzeni, w których ich działania nakładają się. Każde takie przecięcie ma postać:

$$M_{p_i} \cap M_{p_j} = \{k \cdot \text{lcm}(p_i, p_j) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór tych przecięć określa relacyjną strukturę przestrzeni i stanowi podstawę dla późniejszej analizy interferencji wzorców eliminacyjnych.

Remark 1 (Konsekwencje). Z przyjętych aksjomatów wynikają następujące własności przestrzeni:

- Element należący wyłącznie do jednej linii M_p stanowi potęgę źródła p .
- Element należący do wielu linii jest punktem przecięcia; miejsca te wyznacza układ najmniejszych wspólnych wielokrotności.
- Nie istnieje potrzeba osobnej definicji „liczb złożonych” — pozycje te są jedynie efektami relacyjnymi należenia do wielu linii źródeł.

Siatka cykli i rafinacja (wersja bez wartości)

Przestrzeń faz i rytm bazowy

Definicja 0.1 (Rytm bazowy i dwutakt). Niech \mathcal{P} będzie rodziną źródeł; z każdym $p \in \mathcal{P}$ związany jest cykl C_p o okresie τ_p . *Rytm bazowy* $\tau_{\mathcal{P}}$ to najmniejszy wspólny czas powrotu, przy którym wszystkie cykle $\{C_p : p \in \mathcal{P}\}$ powracają do swoich faz początkowych. *Dwutakt* to okno długości $2\tau_{\mathcal{P}}$, w którym rozróżniamy klasy parzystości jako osobny półtakt.

Definicja 0.2 (Funkcje uderzeń). Dla każdego $p \in \mathcal{P}$ definiujemy *głoskową funkcję* $h_p : \Phi \rightarrow \{0, 1\}$, periodyczną o okresie τ_p , która przyjmuje wartość 1 w fazie eliminującej (*uderzenie*) i 0 poza nią. Przestrzeń faz Φ rozumiemy jako cykliczną taśmę parametrów czasu/fazy, bez etykiet liczbowych.

Maski i kandydaci

Definicja 0.3 (Maska pojedyncza i maska kolizyjna). *Maską pojedynczą* nazywamy $h_p^{-1}(1)$ dla $p \in \mathcal{P}$. *Siatka (maska) kolizyjna* to zbiór faz, w których co najmniej dwa źródła uderzają równocześnie:

$$\Lambda(\mathcal{P}) := \left\{ \phi \in \Phi : \exists p \neq q \in \mathcal{P} \ h_p(\phi) = h_q(\phi) = 1 \right\}.$$

Propozycja 1 (Periodyczność maski). Maska $\Lambda(\mathcal{P})$ jest periodyczna z okresem $\tau_{\mathcal{P}}$, a w dwutakcie powtarza się z okresem $2\tau_{\mathcal{P}}$.

Definicja 0.4 (Rafinacja rytmów). Niech \mathcal{P} będzie rodziną źródeł o okresach $\{\tau_p : p \in \mathcal{P}\}$. *Rytm bazowy* $\tau_{\mathcal{P}}$ jest najmniejszym wspólnym okresem wszystkich rytmów źródłowych:

$$\tau_{\mathcal{P}} = \text{lcm}(\{\tau_p : p \in \mathcal{P}\}).$$

Każdy rytm źródłowy τ_p stanowi podział (rafinację) rytmu bazowego, a cykle C_p są jego podstrukturami fazowymi o wspólnym początku.

Definicja 0.5 (Tło kandydatów). Niech $\Phi_2 := [0, 2\tau_{\mathcal{P}})$ oznacza jedno okno dwutaktu. *Kandydatami* nazywamy fazy, które nie są przykryte przez żadne uderzenie pojedyncze:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) := \Phi_2 \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} h_p^{-1}(1).$$

Remark 2 (Interpretacja). $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ to „puste miejsca” po pełnym nałożeniu wzorców pojedynczych; $\Lambda(\mathcal{P})$ to „kolizje” (interferencje) wzorców. W tym języku nie odwołujemy się do wartości N ani kongruencji (mod \cdot); mówimy wyłącznie o pozycjach fazowych i ich pokryciach.

Synchronizacja i rafinacja

Definicja 0.6 (Operator rafinacji). Dodanie nowego źródła q definiuje operator

$$\mathfrak{R}_q : (\Phi, \{h_p\}_{p \in \mathcal{P}}) \mapsto (\Phi', \{h_p\}_{p \in \mathcal{P} \cup \{q\}}),$$

który modyfikuje przestrzeń faz w sposób następujący:

[(i)]

1. Φ' jest cyklicznym usieciowieniem Φ o drobniejszej rozdzielczości faz, powstałym przez synchronizację z cyklem źródła q ;
2. każda klasa faz w Φ rozszczepia się w Φ' na q równych podklas;
3. funkcja h_q przyjmuje wartość 1 dokładnie w jednej podklasie każdego rozszczepienia.

Propozycja 2 (Monotoniczność pokrycia przy rafinacji). Niech q będzie nowym źródłem, a Φ' — przestrzenią po zastosowaniu operatora \mathfrak{R}_q . Wtedy dla każdej fazy $\phi \in \Phi$ i jej rozszczepień $\{\phi'\} \subset \Phi'$ zachodzi

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} h_p^{-1}(1) \subseteq \bigcup_{p \in \mathcal{P} \cup \{q\}} h_p^{-1}(1),$$

co oznacza, że proces rafinacji zwiększa pokrycie przestrzeni faz. W szczególności zbiór kandydatów nie rośnie:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P} \cup \{q\}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{P}),$$

po odpowiednim odwzorowaniu kandydatów z Φ do Φ' .

Interferencja jako mechanizm przesunięć

Definicja 0.7 (Wierzchołki synchronii). Niech $S \subseteq \mathcal{P}$ będzie podzbiorem źródeł. *Wierzchołkiem synchronii* nazywamy jedyną (w jednym cyklu złożonym) fazę, w której wszystkie funkcje $\{h_p\}_{p \in S}$ jednocześnie przyjmują wartość 1:

$$\{\phi \in \Phi : \forall p \in S, h_p(\phi) = 1\}.$$

Propozycja 3 (Lokalizacja zaburzeń). Niech $A, B \subseteq \mathcal{P}$ będą dwiema podrodzinami źródeł. Równoczesne uderzenia h_p dla $p \in A \cup B$ pojawiają się cyklicznie w wierzchołkach synchronii $\text{Sync}(A \cup B)$ w cyklu złożonym. Punkty te stanowią miejsca *interferencji destrukcyjnej* (lokalne spadki liczby kandydatów), natomiast obszary pomiędzy nimi mogą wykazywać *interferencję konstruktywną* — stabilizację lokalnych układów fazowych.

Isolacja trwała i „pierwszość”

Definicja 0.8 (Isolacja trwała (ujęcie bezliczbowe)). Faza $\phi \in \Phi_2$ jest *trwale izolowana*, jeśli dla każdej skończonej sekwencji rafinacji $\mathfrak{R}_{q_1} \circ \dots \circ \mathfrak{R}_{q_m}$ żadna z powstałych faz potomnych $\phi^{(m)}$ nie zostaje przykryta przez żadne pojedyncze uderzenie h_p .

Twierdzenie 0.1 (Kryterium pierwszości jako izolacja). *Fazy trwale izolowane są dokładnie tymi pozycjami, które odpowiadają liczbom pierwszym w klasycznym opisie. W szczególności, w każdym kroku rozszerzania zbioru źródeł pozostają one kandydatami i stają się nowymi źródłami p_{m+1} .*

Propozycja 4 (Równoważne kryteria pierwszości). Niech $L > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned} L \in P &\iff \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq \sqrt{L}}} \llbracket p \mid L \rrbracket = 0 \\ &\iff \prod_{\substack{p \in P \\ p \leq \sqrt{L}}} (1 - \llbracket p \mid L \rrbracket) = 1 \\ &\iff \llbracket \gcd\left(L, \prod_{p \leq \sqrt{L}} p\right) = 1 \rrbracket. \end{aligned}$$

Nawias Iwersona $\llbracket \cdot \rrbracket$ przyjmuje wartość 1, gdy warunek jest spełniony, i 0 w przeciwnym przypadku.

Remark 3 (Most do klasyki).

- Pokrycie przez h_p odpowiada klasycznemu pojęciu podzielności przez p .
- Wierzchołek synchronii jest bezliczbowym odpowiednikiem wspólnej klasy reszt (CRT).
- Rafinacja \mathfrak{R}_q to synchronizacja siatki faz z nowym cyklem, co odpowiada dodaniu nowej kongruencji.

Przestrzeń strukturalna

Aksjomaty

Aksjomat 0.4 (Jednostka (rozdzielczość)). Istnieje element U , zwany jednostką cyklu, który określa najmniejszy krok w przestrzeni. Jednostka nie jest liczbą w sensie arytmetycznym, lecz skalą rozdzielczości.

Aksjomat 0.5 (Przestrzeń strukturalna). Przestrzeń strukturalna to zbiór

$$\mathcal{S}_U = \{n \cdot U : n \in \mathbb{N}\}.$$

Aksjomat 0.6 (Wielokrotność). Dla $a, b \in \mathcal{S}_U$ mówimy, że b jest wielokrotnością a , jeśli

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad b = k \cdot a.$$

Relacja wielokrotności jest strukturalna i nie zależy od wartości jednostki U .

Aksjomat 0.7 (Eliminacja cyklu). Każdy element $a \in \mathcal{S}_U$ eliminuje swoje wielokrotności:

$$E(a) = \{b \in \mathcal{S}_U : b \text{ jest wielokrotnością } a\}.$$

Aksjomat 0.8 (Pierwszość). Element $p \in \mathcal{S}_U$ jest *pierwszy*, jeśli:

1. $p \neq U$,
2. $p \notin E(q)$ dla żadnego $q < p$.

Zbiór elementów pierwszych oznaczamy przez P_U .

Aksjomat 0.9 (Niezmienniczość jednostki). Dla dowolnych U, U' zachodzi izomorfizm

$$n \cdot U \longmapsto n \cdot U',$$

który przenosi P_U na $P_{U'}$. Struktura zbioru pierwszych nie zależy od wyboru jednostki.

Twierdzenia

Twierdzenie 0.2 (Lokalna kompletność). Niech $P_{\max} = \max\{p \in P_U : p \leq n\}$. W przedziale $(U, 2P_{\max}]$ każdy element jest albo

1. wielokrotnością pewnego $p \in P_U$, albo
2. nowym elementem pierwszym.

Twierdzenie 0.3 (Jednoznaczność rozkładu). Każdy element $n \cdot U \in \mathcal{S}_U$ należy do dokładnie jednego przecięcia rodzin cykli $\{E(p) : p \in P_U\}$, które go eliminują. Innymi słowy, złożone mają jednoznaczny zbiór źródeł pierwszych.

Twierdzenie 0.4 (Niezależność wartości). Pierwszość w \mathcal{S}_U jest niezależna od numerycznej wartości U . Wybór $U = 1$, $U = \pi$, czy U jako symbol jest równoważny względem struktury.

Konsekwencje

- Jednostka U nie jest ani pierwsza, ani złożona – to rozdzielczość siatki. Problem klasyczny „czy 1 jest pierwsza” zostaje rozwiązany.
- Elementy pierwsze to źródła struktury: cykle, które powstają wtedy, gdy żadna wcześniejsza eliminacja nie obejmuje danej pozycji.
- Elementy złożone są dokładnie przecięciami rodzin cykli źródłowych.
- Klasyczna arytmetyka to tylko szczególny przypadek etykietowania przestrzeni strukturalnej, z wyborem $U = 1$.

Definicja 0.9 (Jednostka i przestrzeń strukturalna). Niech U będzie jednostką cyklu (dowolny symbol, figura, wartość). *Przestrzeń strukturalna* \mathcal{S} to zbiór wszystkich cykli postaci

$$n \cdot U, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ jest zbiorem indeksów cyklicznych. Jednostka U określa *rozdzielczość* siatki, lecz nie wpływa na strukturę relacji.

Definicja 0.10 (Wielokrotność). Dla $a, b \in \mathcal{S}$ mówimy, że b jest *wielokrotnością* a , jeśli cykl C_a pokrywa cykl C_b w regularnych odstępach:

$$\exists k \in \mathbb{N} : b = k \cdot a.$$

Interpretacyjnie: b leży w zbiorze eliminacji generowanym przez a .

Definicja 0.11 (Eliminacja). Cykl $a \in \mathcal{S}$ *eliminuje* wszystkie swoje wielokrotności:

$$E(a) = \{b \in \mathcal{S} : b \text{ jest wielokrotnością } a\}.$$

Definicja 0.12 (Pierwszość strukturalna). Element $p \in \mathcal{S}$ jest *pierwszy*, jeśli:

1. $p \neq U$ (jednostka nie należy do zbioru pierwszych),
2. p nie jest wielokrotnością żadnego wcześniejszego $q < p$.

Zbiór wszystkich takich elementów oznaczamy przez $P \subset \mathcal{S}$.

Twierdzenie 0.5 (Lokalna kompletność). Niech $P_{\max} = \max\{p \in P : p \leq n\}$. Wtedy każdy element $m \in (U, 2P_{\max}]$ jest albo:

1. wielokrotnością pewnego $p \in P$, albo
2. nowym elementem pierwszym.

Twierdzenie 0.6 (Niezmienniczość jednostki). Wybór jednostki U nie zmienia zbioru struktur eliminacyjnych ani zbioru P . Zmieniona jednostka U' daje przestrzeń \mathcal{S}' izomorficzną z \mathcal{S} poprzez odwzorowanie

$$n \cdot U \mapsto n \cdot U'.$$

Remark 4. W klasycznej arytmetyce pojęcie *podzielności* zależy od tego, że $U = 1$. W przestrzeni strukturalnej naturalną własnością jest *wielokrotność*, która działa poprawnie dla dowolnego U .

Strukturalne ujęcie pierwszości

Pierwszość nie jest własnością wartości liczbowej, lecz właściwością układu relacyjnego, w którym element pozostaje niewyeliminowany po pełnej iteracji mechanizmu eliminacji. W przestrzeni strukturalnej każda jednostka U tworzy sieć relacji wielokrotności, a proces eliminacji przebiega wzdłuż tej sieci.

Element *pierwszy* nie istnieje z definicji — pojawia się jako *stabilny węzeł* w iteracyjnym procesie eliminacyjnym, czyli taki, który nie został zniesiony przez żaden wcześniejszy generator. To właśnie strukturalna trwałość, a nie wartość liczby, wyznacza jego pierwszość.

W tym ujęciu klasyczna arytmetyka staje się przypadkiem szczególnym: przestrzenią, w której jednostka ma wartość $U = 1$, a relacja wielokrotności zapisuje się w języku wartości liczbowych. Pierwszość strukturalna stanowi natomiast *konstruktywny rdzeń* całej przestrzeni: to z niej wyłania się liczba jako efekt porządkowania, a nie odwrotnie.

Pełne dowodzenie tej tezy oraz formalne uzasadnienie stabilności węzłów zostanie przedstawione w rozdziale **1.3: Strukturalne ujęcie pierwszości**, gdzie opisany zostanie mechanizm cyklicznej stabilizacji oraz proces wyłaniania nowych źródeł.

Przykład: jednostka jako π

Przykład 1. Niech jednostką przestrzeni strukturalnej będzie $U = \pi$. Wówczas elementy przestrzeni to

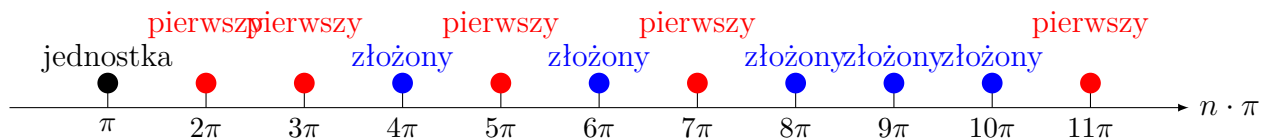
$$\mathcal{S} = \{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots\}.$$

Pierwsze elementy strukturalne to

$$P = \{2\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi, \dots\}.$$

Zauważmy, że zbiór indeksów $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ jest identyczny jak w klasycznej arytmetyce, a różnica polega jedynie na etykietce jednostki: zamiast 1 mamy π .

Remark 5 (Znaczenie przykładu). Przyjęcie $U = \pi$ nie zmienia arytmetycznych relacji, ale ujawnia, że klasyczna struktura liczb naturalnych jest jedynie szczególnym przypadkiem szerszego systemu iteracji na dowolnym obiekcie. „Pierwszość” pozostaje własnością relacyjną, niezależną od tego, czy przestrzeń operuje na wartościach rzeczywistych, geometrycznych, czy symbolicznych.



Remark 6. Wybór jednostki U nie ma wpływu na strukturę zbioru P . Możemy przyjąć $U = 1$, $U = \pi$, $U = \ominus$, $U = \star$, lub dowolny inny symbol. Pierwszość zależy wyłącznie od *wielokrotności cykli*, a nie od wartości etykiety.

Przykład: jednostka π w przestrzeni strukturalnej

Definicja 0.13 (Przestrzeń strukturalna dla $U = \pi$). Niech jednostką przestrzeni strukturalnej będzie $U = \pi$. Wówczas

$$\mathcal{S}_\pi = \{n \cdot \pi : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definicja 0.14 (Pierwsze w przestrzeni \mathcal{S}_π). Zbiór elementów pierwszych to

$$P_\pi = \{p \cdot \pi : p \in \mathbb{P}\},$$

gdzie $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ jest klasycznym zbiorem liczb pierwszych.

Twierdzenie 0.7. Wybór jednostki $U = \pi$ nie zmienia struktury zbioru elementów pierwszych. Zachodzi izomorfizm

$$\mathcal{S}_1 \cong \mathcal{S}_\pi, \quad n \mapsto n \cdot \pi,$$

który przenosi klasyczne liczby pierwsze $p \in \mathbb{P}$ na elementy $p \cdot \pi \in P_\pi$.

Szkic. Relacja wielokrotności jest niezmiennicza względem skalowania jednostki. Jeśli b jest wielokrotnością a w \mathcal{S}_1 , tzn. $b = k \cdot a$, to w \mathcal{S}_π mamy $b \cdot \pi = k \cdot (a \cdot \pi)$. Dlatego własności eliminacyjne i wyłanianie się elementów pierwszych są identyczne. \square

Remark 7. Jednostka π jest obiektem matematycznym o własnej wartości, lecz w tym ujęciu pełni wyłącznie rolę *rozdzielczości cyklu*. Pierwszość zależy od struktury wielokrotności, a nie od numerycznej wartości jednostki.

Zasada zachowania tożsamości (kształtu)

Remark 8 (Zachowanie tożsamości). W przestrzeni strukturalnej \mathcal{S}_U reprezentacja graficzna obiektu nie zmienia jego tożsamości. Wielokrotności obserwowane *modulo* p nie mogą zmieniać „typu” obiektu, a jedynie jego *status* wizualny.

Definicja 0.15 (Projekcja kongruencyjna i jądro). Dla $p \in P$ definiujemy projekcję

$$\pi_p : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathbb{Z}_p, \quad \pi_p(n \cdot U) \equiv n \pmod{p}.$$

Jądro $\ker(\pi_p) = \{n \cdot U : n \equiv 0 \pmod{p}\}$ jest dokładnie zbiorem *wielokrotności* p .

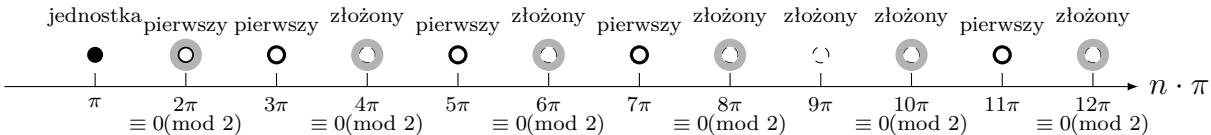
Observation 1. W przestrzeni ilorazowej \mathcal{S}_U / \equiv_p klasa $[0]$ reprezentuje *ten sam obiekt* oglądany „w dostępie modulo p ”. Zmienia się *oznaczenie statusu* (np. „wyeliminowany przez p ”), nie *typ* obiektu.

Remark 9 (Konwencja wizualna). Ustalamy jeden kształt (np. kółko) dla wszystkich elementów \mathcal{S}_U . Statusy kodujemy wyłącznie stylami:

- jednostka U — kółko wypełnione na czarno;
- element pierwszy — kółko z grubym pełnym obrysem;
- element złożony — kółko z cienkim przerywanym obrysem;

- „wielokrotność p ” — *ten sam kształt* z półprzezroczystym szarym pierścieniem lub etykietą „ $\equiv 0 \pmod{p}$ ”.

Remark 10 (Znaczenie zasady zachowania tożsamości). W klasycznej arytmetyce redukcja modulo p jest operacją na wartościach. W przestrzeni strukturalnej staje się *projekcją obserwacyjną*: obiekt zachowuje swój kształt, lecz jego status (np. przynależność do linii p) ulega zmianie w zależności od poziomu obserwacji. Tożsamość elementu jest więc niezmiennikiem przestrzeni, a kongruencja tylko jednym z jej przekrojów.



Przestrzeń strukturalna funkcjonalna

Przestrzeń strukturalna funkcjonalna rozszerza pojęcie jednostki z wartości stałej na funkcję. Dzięki temu struktura może adaptować się lokalnie do zmiennej rozdzielczości, zachowując jednocześnie prawa wielokrotności i pierwszości. W tym sensie stanowi uogólnienie klasycznej przestrzeni liczbowej na kontinuum.

Aksjomaty

Aksjomat 0.10 (Jednostka funkcjonalna). Niech $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ będzie funkcją dodatnią. Jednostką przestrzeni jest $U = f(x)$, rozumiana jako *cały cykl funkcjonalny*, a nie liczba.

Aksjomat 0.11 (Przestrzeń strukturalna funkcjonalna). Przestrzeń strukturalna funkcjonalna to zbiór

$$\mathcal{S}_f = \{n \cdot f(x) : n \in \mathbb{N}, x \in D\}.$$

Jest to „rozciągliwa siatka”, w której rozdzielczość lokalna zależy od wartości $f(x)$.

Aksjomat 0.12 (Wielokrotność funkcjonalna). Dla $a(x), b(x) \in \mathcal{S}_f$ mówimy, że $b(x)$ jest wielokrotnością $a(x)$, jeśli

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad b(x) = k \cdot a(x).$$

Relacja ta jest czysto strukturalna i niezależna od kształtu funkcji f .

Aksjomat 0.13 (Eliminacja funkcjonalna). Każdy element $a(x) \in \mathcal{S}_f$ eliminuje wszystkie swoje wielokrotności:

$$E(a) = \{b(x) \in \mathcal{S}_f : b(x) = k \cdot a(x)\}.$$

Aksjomat 0.14 (Pierwszość funkcjonalna). Element $p(x) \in \mathcal{S}_f$ jest *pierwszy*, jeśli:

1. $p(x) \neq f(x)$ (jednostka),
2. $p(x) \notin E(q(x))$ dla żadnego $q(x) < p(x)$.

Zbiór takich elementów oznaczamy P_f .

Aksjomat 0.15 (Niezmienniczość wobec wyboru f). Struktura zbioru pierwszych nie zależy od konkretnej formy f . Dla f, g dodatnich funkcji zachodzi izomorfizm:

$$n \cdot f(x) \mapsto n \cdot g(x),$$

który przenosi P_f na P_g .

Twierdzenia

Z aksjomatów przestrzeni strukturalnej funkcjonalnej wynikają poniższe własności, które stanowią jej pełną analogię do klasycznej arytmetyki, lecz działają niezależnie od wartości jednostki funkcjonalnej i lokalnej metryki.

Twierdzenie 0.8 (Lokalna kompletność). *Niech $P_{\max}(x) = \max\{p(x) \in P_f : p(x) \leq n \cdot f(x)\}$. W przedziale $(f(x), 2P_{\max}(x)]$ każdy element \mathcal{S}_f jest albo*

1. wielokrotnością pewnego $p(x) \in P_f$, albo
2. nowym elementem pierwszym.

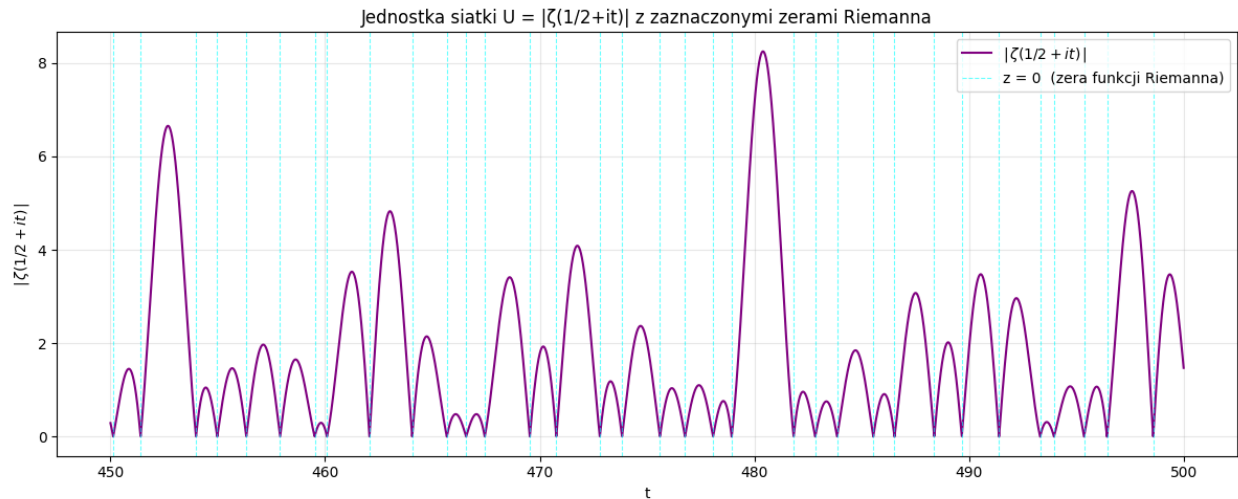
Twierdzenie 0.9 (Jednoznaczność rozkładu). *Każdy element $n \cdot f(x) \in \mathcal{S}_f$ należy do dokładnie jednego przecięcia rodzin cykli $\{E(p(x)) : p(x) \in P_f\}$. W szczególności, elementy złożone mają jednoznaczny zbiór źródeł pierwszych.*

Twierdzenie 0.10 (Niezależność wartości funkcji). *Pierwszość w \mathcal{S}_f zależy wyłącznie od relacji cyklicznych, a nie od wartości $f(x)$. Zmiana jednostki f (np. $f(x) = 1$, $f(x) = \pi$, $f(x) = \text{Li}(x)$, $f(x) = |\zeta(1/2 + it)|$) nie zmienia struktury zbioru P_f .*

Konsekwencje

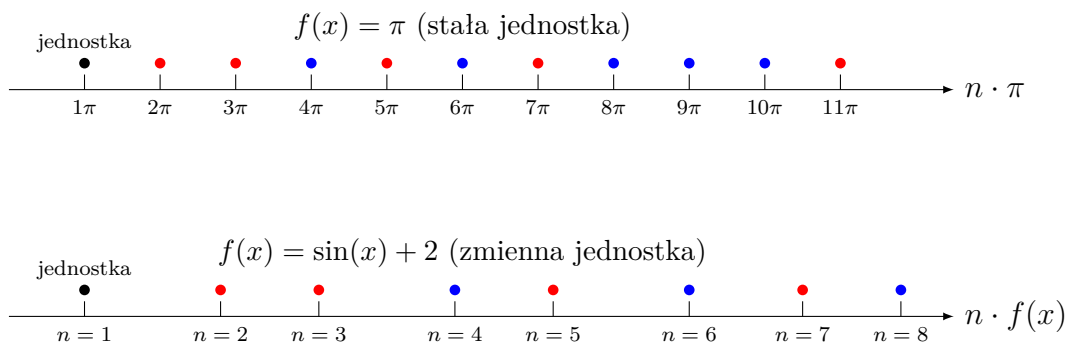
Z powyższych twierdzeń wynikają konsekwencje o charakterze ontologicznym i analitycznym, które łączą klasyczną teorię liczb z przestrzeniami funkcjonalnymi:

- Jednostka $f(x)$ wyznacza lokalną rozdzielczość siatki, lecz nie jest elementem pierwszym ani złożonym.
- Pierwsze w \mathcal{S}_f są źródłami rytmów cyklicznych także w przestrzeni zdeformowanej przez f .
- Elementy złożone to przecięcia rodzin cykli, niezależnie od tego, czy siatka jest równomierna, czy rozciągliwa.
- Hipoteza Riemanna może być reinterpretowana jako pytanie o *punkty degeneracji cykli* w przestrzeni \mathcal{S}_f dla $f(x) = \zeta(s)$.



Rysunek 1: **Jednostka siatki $U = |\zeta(1/2+it)|$ z zaznaczonymi zerami Riemanna.** Zera wyznaczają punkty degeneracji cykli w przestrzeni \mathcal{S}_f . Między nimi jednostka zachowuje ciągłość, lecz struktura rytmiczna ulega lokalnym przesunięciom fazowym. W tym ujęciu hipoteza Riemanna przyjmuje postać pytania o stabilność tej siatki w nieskończonej rafinacji przestrzeni funkcjonalnej.

Schemat porównawczy: siatka stała i zmiennometryczna



Remark 11. Górna oś: równomierna siatka $f(x) = \pi$. Dolna oś: odkształcona siatka $f(x) = \sin(x) + 2$, gdzie odstępów zmieniają się w zależności od wartości funkcji. W obu przypadkach struktura pierwszości (czerwone punkty) pozostaje nienaruszona.

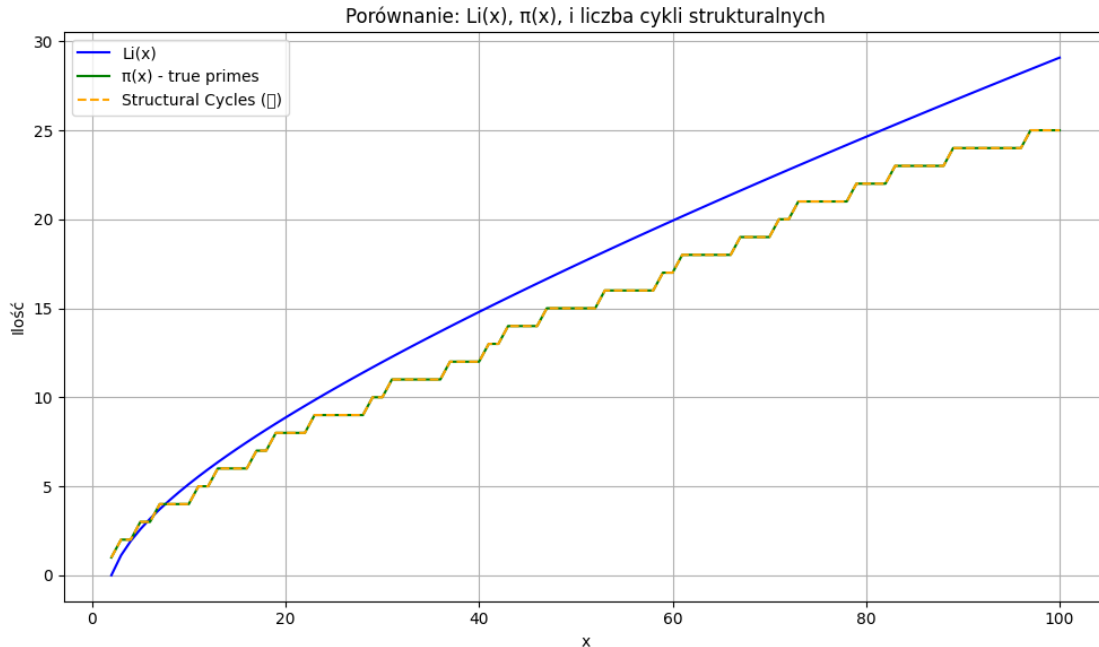
Remark 12 (Tożsamość strukturalna). Deformacja siatki nie niszczy relacji pierwszości — przesuwa jedynie fazy cykli. Wynika stąd, że zjawisko pierwszości jest nie tyle własnością wartości liczbowych, co *invariantem topologicznym przestrzeni strukturalnej*.

Przykład 2. Na poniższym wykresie porównano trzy funkcje:

- $\text{Li}(x)$ – logarytmiczną całkę (klasyczne przybliżenie $\pi(x)$),
- $\pi(x)$ – rzeczywistą liczbę liczb pierwszych $\leq x$,

- liczbę *cykli strukturalnych* – obliczoną niezależnie od pojęcia liczby pierwszej.

Widać, że przebieg cykli strukturalnych niemal idealnie pokrywa się z faktyczną funkcją $\pi(x)$.



Rysunek 2: Porównanie: $Li(x)$, $\pi(x)$ oraz liczby cykli strukturalnych.

Trójwarstwowa struktura przestrzeni strukturalnej

Uogólnienie przestrzeni strukturalnej \mathcal{S} prowadzi do trzech warstw organizacji relacji: *relacyjnej pierwotnej* (źródło), *zasadowej uogólniającej* (reguła) oraz *operacyjnej* (przejaw). Każda z nich opisuje inny etap istnienia pierwszości – od czystego istnienia relacyjnego, przez zasadę uogólnienia, po jej konkretny przejaw w świecie operacji.

Warstwa I \checkmark źródło (relacyjny prapoczątek),
Warstwa II \checkmark zasada (uogólnienie),
Warstwa III \checkmark przejaw (operacja).

Warstwa III: operacyjna (światy przejawów)

Na tym poziomie przestrzeń \mathcal{S} rozwija się poprzez iterację *kroku strukturalnego*, rozumianego jako transformację wewnętrzną przestrzeni przy stałej jednostce rozdzielczości U . Jednostka U nie rośnie wraz z iteracją — pozostaje stała, a ruch odbywa się po osi strukturalnej S .

$$S \mapsto kS * U, \quad S \mapsto S^k * U, \quad S \mapsto \sqrt[k]{S} * U, \quad \text{lub inne formy iteracji.}$$

Definicja 0.16 (Pierwszość operacyjna). Element p_k jest *pierwszy w sensie operacyjnym*, jeśli nie jest generowany przez żaden wcześniejszy krok danego typu. Dla kroku liniowego $S \mapsto kS * U$ odpowiada to klasycznym liczbom pierwszym; dla kroku potęgowego $S \mapsto S^k * U$ – wykładnikom $(2, 3, 5, 7, \dots)$; dla pierwiastkowego $S \mapsto \sqrt[k]{S} * U$ – stopniom $(2, 3, 5, 7, \dots)$.

Remark 13. Wszystkie te postacie wyrażają jedną zasadę pierwszości — zmienia się jedynie forma iteracji kroku, nie sama relacja jego wyłaniania. Pierwszość jest więc stanem relacyjnym przestrzeni, a nie własnością liczby w sensie wartościowym.

Remark 14. W klasycznej arytmetyce ruch po osi wartości $n = 1, 2, 3, \dots$ jest interpretowany tak, jakby zmieniało się U . W przestrzeni strukturalnej jest odwrotnie: U jest stałą rozdzielczości, a to struktura S wykonuje ruch po własnej osi generacyjnej. Pierwszość nie zależy więc od wartości jednostki, lecz od sposobu, w jaki struktura S organizuje własny rytm iteracji.

Przykład: przestrzeń $\mathcal{S}^S \cdot U$

W tej konstrukcji przestrzeń relacyjna rozwija się jako \mathcal{S}^S , czyli każdy element generuje własny wymiar istnienia. Długość relacyjna cyklu opisującego taki element wynosi $|S| = S^S$. Przejście do przestrzeni wartości wymaga wprowadzenia zewnętrznego czynnika U , pełniącego funkcję *operatora translacji poznawczej*:

$$U = S, \quad \text{a więc} \quad \mathcal{S}^S \xrightarrow[\text{konwersja przez } U]{\sqrt[S]{}} S.$$

Relacja ta nie jest działaniem samej struktury, lecz sposobem, w jaki obserwator przelicza rzeczywistość relacyjną na własną skalę pomiaru. W przestrzeni \mathcal{S}^S każdy element istnieje niezależnie, a *pierwszość* jest stanem relacyjnej nieprzekładalności. Wprowadzenie U przekształca tę strukturę w przestrzeń operacyjną $\mathcal{S}^S \cdot U$, w której relacyjny porządek staje się widoczny w postaci klasycznych liczb pierwszych.

$$S = 2 \Rightarrow S^S = 4, \quad S = 3 \Rightarrow 27, \quad S = 5 \Rightarrow 3125, \quad S = 7 \Rightarrow 823,543; \quad \sqrt[S]{S^S} = S.$$

Interpretacyjnie:

- warstwa relacyjna opisuje czyste \mathcal{S}^S – ekspansję bytu we własnej przestrzeni,
- czynnik U należy do warstwy operacyjnej – stanowi zewnętrzny filtr poznawczy,
- wynik $\sqrt[S]{S^S} = S$ ujawnia zgodność między relacją a wartością.

Tak powstała przestrzeń $\mathcal{S}^S U$ pokazuje, że klasyczne liczby pierwsze można interpretować nie jako cechę arytmetyki, lecz jako przejaw relacyjnego porządku ujawnionego przez zewnętrzny współczynnik translacji U .

Warstwa II: uogólnienie operacyjne

W tej warstwie krok k nie jest już konkretną funkcją (dodawanie, potęgowanie), lecz ogólną regułą generacyjną, która określa, że z danego elementu a może powstać element b , jeśli b nie jest wynikiem żadnego wcześniejszego działania.

Definicja 0.17 (Przestrzeń operacyjna). Niech Φ oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych reguł generacji. Definiujemy rodzinę przestrzeni

$$\mathcal{S}_\Phi = \{S_\phi : \phi \in \Phi\},$$

gdzie każda przestrzeń S_ϕ powstaje w wyniku iteracji działania ϕ na własnych elementach.

Twierdzenie 0.11 (Uogólniona pierwszość). *Pierwszość w \mathcal{S}_Φ jest własnością relacyjną, niezależną od konkretnej operacji. Jeśli istnieje relacja generacyjna ϕ taka, że $b = \phi(a)$, to zbiór elementów niewyeliminowanych przez żadne wcześniejsze ϕ_i stanowi zbiór elementów pierwszych drugiej warstwy.*

Remark 15. Warstwa druga uogólnia wszystkie możliwe formy pierwszości. Określa nie „jaki jest krok”, lecz że *krok istnieje i może być różny*.

Warstwa I: relacyjny prapoczątek

Najgłębsza warstwa nie zakłada żadnej jawnej operacji. Istnieje jedynie relacja „następstwa”, wynikająca z niemożności zniesienia jednego elementu przez drugi.

Definicja 0.18 (Relacyjna sekwencja pierwotna). Niech a, b, c, \dots będą elementami przestrzeni \mathcal{S}_0 , dla których

$$b \succ a, \quad c \succ \{a, b\}, \quad \dots$$

oznacza, że każdy kolejny element istnieje tylko dzięki temu, że wcześniejsze nie wystarczają do pełnego pokrycia przestrzeni relacji. Zbiór $\{aS, bS, cS, \dots\}$ stanowi pierwotny zapis relacyjny.

Remark 16. Na tym poziomie nie istnieje jeszcze pojęcie liczby, funkcji ani działania. Istnieje jedynie relacyjna konieczność, z której dopiero rodzą się struktury operacyjne. Pierwszość jest tu tożsama z istnieniem: element jest „pierwszy”, bo nie może zostać zredukowany przez żadną wcześniejszą relację.

Procedura badawcza: Strukturalno–funkcjonalna analiza liczb pierwszych

1. Wejście

System przyjmuje dwa podstawowe źródła danych:

1. Funkcja siatki $U = f(x)$

Jednostka cyklu może być dowolną funkcją dodatnią, np.

$$f(x) = 1, \quad f(x) = \pi, \quad f(x) = \sin(x) + 2, \quad f(x) = |\zeta(1/2 + it)|.$$

Funkcja ta definiuje lokalną rozdzielczość cyklu (rytm przestrzeni).

2. Zewnętrzna baza zer (opcjonalnie)

Plik tekstowy zawierający części urojone t zer Riemanna lub innych funkcji L . Dane mogą pochodzić z literatury, obliczeń własnych lub źródeł alternatywnych.

2. Transformacja

1. Generacja cykli strukturalnych

Symulowane są przesuwane cykle binarne (lub symboliczne). Reguła: nowy cykl powstaje wtedy i tylko wtedy, gdy żaden istniejący cykl nie eliminuje bieżącej pozycji. Wynikiem są *strukturalne pierwsze*, izomorficzne do klasycznych liczb pierwszych.

2. Obliczenie jednostki siatki

Dla wybranej funkcji $U = f(x)$ próbkowane są wartości w zadanym zakresie, np. $t \in [0, 50]$. Otrzymana amplituda (np. $|\zeta(1/2 + it)|$) pełni rolę *gumowej siatki*, na której rozkładane są cykle.

3. Synchronizacja z zerami

Wczytane z pliku wartości zer nakładane są jako pionowe linie na wykres funkcji siatki. Równocześnie wyszukiwane są minima amplitudy (lokalne doliny fali). Rezultatem jest dopasowanie różnicy Δt pomiędzy znanymi zerami a degeneracjami cykli.

3. Wizualizacja

System generuje cztery typy obrazów:

1. **Wykres funkcji siatki** – fala $|\zeta(1/2 + it)|$ lub innej funkcji $f(x)$.
2. **Wykres z zaznaczonymi zerami** – pionowe linie odpowiadające miejscom degeneracji rytmu.
3. **Heatmapa spawnów cykli** – mapa pojawiania się strukturalnych pierwszych.
4. **Styl MIDI** – partytura rytmu, gdzie pierwsze traktowane są jako uderzenia muzyczne.

4. Wyjście

1. Tabela zbiorcza (np. CSV) zawierająca:

- wartości t zer Riemanna,
- najbliższe minima amplitudy $|f(x)|$,

- różnicę Δt ,
 - amplitudę w minimum.
2. **Wizualizacje graficzne** przedstawiające rytmy siatki, synchronizację z zerami oraz cykle strukturalne.

5. Znaczenie

- System tworzy pomost między trzema obszarami: *arytmetyką* (cykle i wielokrotności), *analizą zespoloną* (funkcje $f(x)$, $\zeta(s)$) oraz *teorią struktur* (przestrzenie i deformacje siatek).
- Ujęcie strukturalne pokazuje, że pojęcia takie jak „pierwszość”, „podzielność” czy „złożoność” mają charakter relacyjny — wynikają z organizacji cykli, a nie z wartości liczbowych samych w sobie.
- Analiza funkcjonalna pozwala badać zachowanie tych struktur w przestrzeniach o zmiennej rozdzielczości, gdzie jednostka $f(x)$ może przyjmować postać dowolnej funkcji dodatniej.
- W tym sensie zjawiska obserwowane w teorii liczb można odczytywać jako przejawy głębszego rytmu przestrzennego, w którym klasyczna arytmetyka jest tylko przypadkiem szczególnym.

6. Podsumowanie

- Model strukturalno–funkcjonalny ukazuje liczby pierwsze jako trwałe stany cyklicznej równowagi, a nie odosobnione byty arytmetyczne.
- Pokazuje, że ta równowaga może być badana zarówno analitycznie, jak i wizualnie — przez rytmy, fazy i interferencje cykli.
- Formalne operacje (eliminacja, rafinacja, synchronizacja) mają bezpośrednie odpowiedniki geometryczne i rytmiczne, co pozwala traktować arytmetykę jako zjawisko strukturalne.
- Przestrzeń funkcjonalna otwiera możliwość dalszych badań: nad lokalną stabilnością cykli, punktami degeneracji oraz relacjami między siatkami o różnych funkcjach bazowych $f(x)$.

Zakończenie: Struktura jako zjawisko arytmetyczne

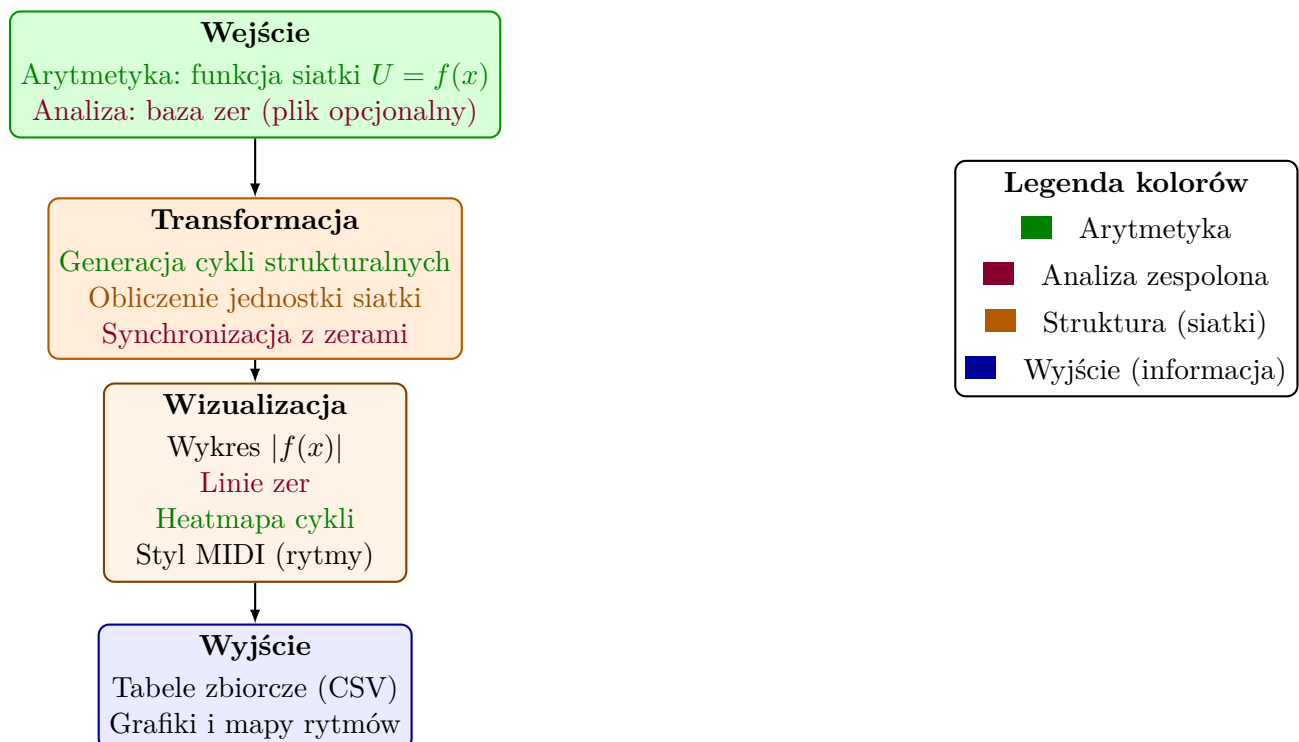
W przedstawionym ujęciu strukturalno–funkcjonalnym liczby pierwsze stanowią efekt wewnętrznej organizacji przestrzeni eliminacyjnej. Zjawisko pierwszości wynika z własności cykli, a nie z wartości liczbowych. Każda funkcja $f(x)$ może pełnić rolę jednostki strukturalnej, definiując lokalną rozdzielczość siatki bez wpływu na relacje wielokrotności.

Pierwszość jest stanem stabilnym w systemie cyklicznym, wyznaczonym przez równowagę pomiędzy rytmem siatki a eliminacją. Struktura zbioru elementów pierwszych jest inwariantna względem wyboru funkcji f , co potwierdza, że przestrzeń arytmetyczna zachowuje własności niezależne od jednostki.

Formalny model przestrzeni strukturalnej umożliwia opis zjawisk arytmetycznych za pomocą operacji wewnętrznych (eliminacja, rafinacja, synchronizacja), bez odwołań do pojęcia liczby jako wielkości. W tym kontekście hipoteza Riemanna przyjmuje postać warunku równowagi między cyklami funkcjonalnymi a ich miejscami degeneracji.

Strukturalno-funkcjonalna reprezentacja arytmetyki wskazuje, że relacje pierwszości i złożoności są własnościami układu cyklicznego, a nie cechami indywidualnych wartości. Model ten stanowi podstawę do dalszych badań nad stabilnością struktur, ich symetriami oraz zachowaniem w przestrzeniach funkcjonalnych.

Schemat blokowy procedury z legendą kolorów



Arytmetyka strukturalna

Wprowadzenie

Matematyka Relacyjna traktuje liczby nie jako wartości, lecz jako *stany relacyjne* w przestrzeni wzorców. Każda liczba naturalna jest punktem przecięcia cykli generowanych przez liczby pierwsze. W tym ujęciu klasyczne działania arytmetyczne opisują jedynie relacje przesunięcia i synchronizacji w obrębie tych cykli.

W niniejszym dokumencie formalizujemy podstawowe operacje arytmetyczne w przestrzeni relacyjnej \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} W_p, \quad W_p = \{ p_k = k \cdot p \mid k \in \mathbb{N}^+ \}.$$

Dla dowolnego skończonego podzbioru liczb pierwszych $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}$ definiujemy ograniczoną przestrzeń relacyjną:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} W_p \subseteq \mathcal{R}.$$

Każdy rozdział wprowadza jedną z operacji, definiując jej przestrzeń, przesunięcie relacyjne, własności i cykliczność.

Uwaga notacyjna. W niniejszym dokumencie W_p (pisane małą literą p) oznacza *zbiór wielokrotności* p — pozycje “aktywowane” przez p . W dokumentach koncepcyjnych MR symbol W_P (pisany wielką literą P) oznacza *wzorzec eliminacyjny* — zbiór liczb niewyeliminowanych przez żaden czynnik z P . Oba zbiory są wzajemnie dopełniające w przedziale $[1, T]$, gdzie $T = \prod_{p \in P} p$.

Struktura Przestrzeni Relacyjnej

Definicje podstawowe

Niech $p \in \mathbb{P}$. Wzorzec relacyjny W_p to zbiór wszystkich stanów generowanych przez p :

$$W_p = \{ p_k = k \cdot p \mid k \in \mathbb{N}^+ \}.$$

Dla dowolnego skończonego zbioru liczb pierwszych $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ przestrzeń wspólna (perrodyk) ma długość:

$$L = \text{lcm}(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

a wszystkie operacje zachodzą w grupie addytywnej:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}.$$

Relacyjne przesunięcie

Każda operacja *addytywna* w przestrzeni relacyjnej jest określona przez wektor przesunięcia:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n s_i p_i,$$

gdzie s_i to współczynniki kroków przypisane do poszczególnych wzorców. Sekwencja $\{x_n\}$ w przestrzeni $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ jest cykliczna z okresem:

$$T = \frac{L}{\gcd(L, \Delta)}.$$

Operacje *multiplikatywne* (mnożenie, dzielenie) skalują pozycję przez czynnik, a nie przesuwają o stały krok — patrz sekcja Mnożenie.

Relacyjne Dodawanie

Definicja 1 (Wzorzec relacyjny liczby pierwszej)

Niech $p \in \mathbb{P}$ (zbiór liczb pierwszych). Wzorzec relacyjny W_p to zbiór wszystkich pozycji odpowiadających wielokrotnościom p :

$$W_p = \{p_k = k \cdot p \mid k \in \mathbb{N}^+\}.$$

Każdy p_k reprezentuje stan relacyjny w przestrzeni generowanej przez p .

Definicja 2 (Przestrzeń wspólna wzorców)

Dla dwóch liczb pierwszych p_a, p_b definiujemy wspólną przestrzeń wzorców:

$$\mathcal{R}_{a,b} = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}, \quad \text{gdzie } L = \text{lcm}(p_a, p_b).$$

Wszystkie operacje relacyjne zachodzą w tej przestrzeni modulo L .

Definicja 3 (Relacyjne przesunięcie)

Niech $s_a, s_b \in \mathbb{Z}^+$ będą współczynnikami kroków. Dla pary (p_a, p_b) definiujemy relacyjne przesunięcie:

$$\Delta = s_a p_a + s_b p_b.$$

Δ jest wektorem przesunięcia w przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b}$.

Definicja 4 (Relacyjne dodawanie)

Niech $a \in W_{p_a}, b \in W_{p_b}$. Operację relacyjnego dodawania definiujemy jako:

$$a \oplus b \equiv (a + b) \pmod{L}, \quad \text{gdzie } L = \text{lcm}(p_a, p_b).$$

Nie jest to suma wartości $a + b$, lecz nowa pozycja w cyklu wspólnym $\mathcal{R}_{a,b}$.

Twierdzenie 1 (Cykliczność operacji \oplus)

Dla dowolnych $a, b \in \mathcal{R}_{a,b}$ oraz stałych kroków s_a, s_b zachodzi:

$$(a \oplus b)_{n+1} \equiv (a \oplus b)_n + \Delta \pmod{L}.$$

Wynikowa sekwencja ma okres:

$$T = \frac{L}{\gcd(L, \Delta)}.$$

Dowód: Bezpośrednio z definicji przesunięcia w grupie addytywnej $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$.

Definicja 5 (Zwinięcie kroku niestałego)

Dla dowolnej skończonej sekwencji kroków $\{(s_{a,n}, s_{b,n})\}_{n=1}^N$:

$$S_a = \sum_{n=1}^N s_{a,n}, \quad S_b = \sum_{n=1}^N s_{b,n}, \quad \Delta_{\text{eff}} = S_a p_a + S_b p_b.$$

Operację po N krokach traktujemy jako pojedyncze przesunięcie o Δ_{eff} w $\mathcal{R}_{a,b}$.

Twierdzenie 2 (Zamknięcie przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b}$ na \oplus)

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_{a,b}, \quad a \oplus b \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Dowód: Wynika z faktu, że $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ jest grupą addytywną zamkniętą na dodawanie modulo L .

Wniosek

Operacja \oplus jest:

- dobrze określona dla wszystkich par wzorców,
- cykliczna z okresem $T = L / \gcd(L, \Delta)$,
- niezależna od wartości liczbowych (działa w pełni w przestrzeni indeksów),
- redukowalna w przypadku niestałych kroków do kroku efektywnego.

Interpretacja strukturalna

1. Klasyczne dodawanie to działanie w \mathbb{Z} .
2. Relacyjne dodawanie to działanie w $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$, gdzie “liczby” są pozycjami wzorców.
3. Wielkość zapisu (ilość cyfr) nie ma znaczenia; struktura zależy tylko od relacji między p_a, p_b i ich krokami.

Relacyjne Odejmowanie

Definicja 1 (Operacja odwrotna do dodawania)

Niech $a \in W_{p_a}$, $b \in W_{p_b}$. Niech $L = \text{lcm}(p_a, p_b)$ będzie wspólnym periodykiem. Operację relacyjnego odejmowania definiujemy jako przesunięcie odwrotne względem \oplus :

$$a \ominus b \equiv (a - b) \pmod{L}.$$

Odejmowanie w przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b} = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ nie usuwa wartości b , lecz cofa pozycję relacyjną o długość odpowiadającą b w rytmie periodyku L .

Definicja 2 (Relacyjny krok ujemny)

Dla współczynników kroków $s_a, s_b \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta = s_a p_a - s_b p_b.$$

Wektor Δ określa przesunięcie w przeciwnym kierunku do dodawania. Wszystkie przekształcenia pozostają w tej samej przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b}$.

Twierdzenie 1 (Cykliczność relacyjnego odejmowania)

Dla dowolnych $a, b \in \mathcal{R}_{a,b}$ zachodzi:

$$(a \ominus b)_{n+1} \equiv (a \ominus b)_n - \Delta \pmod{L}.$$

Sekwencja różnicowa posiada okres:

$$T = \frac{L}{\text{gcd}(L, \Delta)}.$$

Zatem każda operacja odejmowania jest równie cykliczna jak dodawanie — jedynie kierunek przesunięcia po cyklu jest przeciwny.

Definicja 3 (Zwinięcie kroku niestałego)

Dla niestałych kroków $\{(s_{a,n}, s_{b,n})\}_{n=1}^N$ definiujemy krok efektywny:

$$\Delta_{\text{eff}} = \sum_{n=1}^N (s_{a,n} p_a - s_{b,n} p_b),$$

a po N krokach otrzymujemy stan:

$$x_N \equiv x_0 - \Delta_{\text{eff}} \pmod{L}.$$

Twierdzenie 2 (Zamknięcie na odejmowanie)

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_{a,b}, \quad a \ominus b \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Dowód: Grupa $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ jest zamknięta na dodawanie i posiada elementy odwrotne. Odejmowanie relacyjne jest zatem elementem odwrotnym względem \oplus .

Interpretacja

Operacja \ominus jest przesunięciem *wstecz* po rytmie periodyku L . W przeciwieństwie do klasycznego odejmowania, nie prowadzi do “mniejszej” wartości, lecz do *poprzedniego stanu relacyjnego*.

Dla przykładu:

$$a = 2(3), \quad b = 1(5), \quad L = \text{lcm}(3, 5) = 15.$$

Wtedy:

$$a \ominus b \equiv (6 - 5) \bmod 15 = 1,$$

co oznacza, że relacja przeszła o jedną pozycję wstecz w rytmie piętnastkowym.

Relacyjne Mnożenie

Definicja 1 (Mnożenie jako zwinięte dodawanie)

Niech $a \in W_{p_a}$, $b \in W_{p_b}$, oraz $L = \text{lcm}(p_a, p_b)$. Operację relacyjnego mnożenia definiujemy jako przekształcenie w przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b} = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$:

$$a \otimes b \equiv (a \cdot b) \bmod L.$$

Nie jest to klasyczne mnożenie wartości, lecz *skalowanie pozycji relacyjnej*: wynik zajmuje tę pozycję w cyklu, którą wskazuje iloczyn $a \cdot b$ zredukowany do okresu L .

Definicja 2 (Relacyjny czynnik skalujący)

W addytywnej interpretacji przestrzeni $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ rozróżniamy dwa typy przesunięć:

$$\begin{aligned} \Delta_{\oplus} &= s_a p_a + s_b p_b && \text{(przesunięcie liniowe — dodawanie),} \\ \Delta_{\otimes} &= a \cdot b \bmod L && \text{(przesunięcie skalowane — mnożenie).} \end{aligned}$$

Dla dodawania przyrost Δ_{\oplus} jest stały i niezależny od bieżącej pozycji. Dla mnożenia przyrost Δ_{\otimes} zależy od obu argumentów — mnożenie nie przesuwa pozycji o stały krok, lecz *skaluje ją czynnikiem b* w obrębie periodyku L .

Definicja 3 (Operacja relacyjna)

Operacja relacyjnego mnożenia:

$$a \otimes b \equiv (a \cdot b) \pmod{L},$$

przy czym a, b reprezentują *indeksy relacyjne* (pozycje) w obrębie periodyku, nie wartości liczbowe. Mnożenie jest zatem *złożeniem rytmów*: rytm liczby a jest obserwowany w tempie rytmu liczby b .

Twierdzenie 1 (Cykliczność relacyjnego mnożenia)

Wynikowa sekwencja iterowanego mnożenia $(a \otimes b^n)_{n \geq 0}$ jest cykliczna, z okresem:

$$T = \text{ord}_L(b) = \min\{n \geq 1 : b^n \equiv 1 \pmod{L}\},$$

jeżeli $\text{gcd}(b, L) = 1$ (element odwracalny).

Dowód: Iterowane mnożenie przez b w grupie $(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^\times$ jest działaniem grupy skończonej; z twierdzenia Lagrange'a każdy element ma skończony rząd.

Twierdzenie 2 (Zamknięcie przestrzeni na mnożenie)

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_{a,b}, \quad a \otimes b \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Dowód: $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ jest zamkniętą na mnożenie modulo L . Wynik $(a \cdot b) \pmod{L}$ zawsze należy do $\{0, 1, \dots, L-1\}$.

Definicja 4 (Kumulatywne mnożenie relacyjne)

Dla sekwencji czynników $\{b_n\}_{n=1}^N$ wynik złożenia mnożeń:

$$x_N \equiv x_0 \cdot \prod_{n=1}^N b_n \pmod{L}.$$

W przeciwieństwie do addytywnego „zwinięcia kroku” (gdzie sumujemy przesunięcia), kumulatywny efekt mnożeń jest *iloczynem czynników* zredukowanym do periodyku L .

Interpretacja strukturalna

Mnożenie w ujęciu relacyjnym to *zagnieżdżone przesunięcie cyklu w samym sobie*:

- \oplus — przesunięcie *liniowe* (stały krok Δ);
- \otimes — przesunięcie *skalowane* (czynnik b na osi);
- $\uparrow_{\mathcal{R}}$ — przesunięcie *potęgowe* (iteracja skalowania).

Każda kolejna operacja jest szybszą wersją tej samej podróży po periodyku.

W klasycznym ujęciu: $6 \times 4 = 24$. W ujęciu relacyjnym (dla $L = \text{lcm}(6, 4) = 12$):

$$6 \otimes 4 \equiv 24 \pmod{12} = 0.$$

Wynik 0 oznacza, że iloczyn trafia dokładnie do punktu synchronizacji obu rytmów — domknięcia periodyku. (Uwaga: 6 i 4 są liczbami złożonymi; w przestrzeni relacyjnej \mathcal{R} operacja jest poprawna dla dowolnych elementów, nie tylko pierwszych.)

Wniosek

Operacja \otimes odpowiada *skalowaniu pozycji* w przestrzeni relacyjnej:

- Addytywny analog: \oplus przesuwa pozycję o Δ ;
- Multiplikatywny analog: \otimes skaluje pozycję przez $b \pmod{L}$.

Mnożenie relacyjne zachowuje zamknięcie w $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ i jest algebraicznie spójne z homomorfizmem $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ opisanym w pliku głównym.

Relacyjne Dzielenie

Definicja 1 (Dzielenie jako odwrotność mnożenia)

Niech $a \in W_{p_a}$, $b \in W_{p_b}$ oraz $L = \text{lcm}(p_a, p_b)$. Operację relacyjnego dzielenia definiujemy jako odwrotność relacyjną względem mnożenia:

$$a \oslash b \equiv a \otimes b^{-1} \pmod{L},$$

gdzie b^{-1} jest elementem odwrotnym względem \otimes , tj.

$$b \otimes b^{-1} \equiv 1 \pmod{L}.$$

Odwrotność b^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{gcd}(b, L) = 1$. Jeżeli $\text{gcd}(b, L) = d > 1$, operacja $a \oslash b$ jest określona tylko wtedy, gdy $d \mid a$; wówczas istnieje d rozwiązań tworzących klasę modulo L/d .

Definicja 2 (Rozszerzenie dla nieodwracalnych dzielników)

Dla elementów b , które nie są odwracalne w $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$, definiujemy zredukowaną przestrzeń $\mathcal{R}_{a,b}^{(d)}$ o module $L_d = L/d$ oraz zredukowany dzielnik $b_d = b/d$. Wtedy:

$$a \oslash b = \{x \in \mathcal{R}_{a,b} \mid b \otimes x \equiv a \pmod{L}\} \equiv \{x_d \pmod{L_d} \mid b_d \otimes x_d \equiv a/d \pmod{L_d}\}.$$

Po podniesieniu rozwiązań z $\mathcal{R}_{a,b}^{(d)}$ do $\mathcal{R}_{a,b}$ otrzymujemy klasę d stanów zgodnych z cyklem L .

Twierdzenie 1 (Cykliczność dzielenia relacyjnego)

Jeżeli b^{-1} istnieje, to sekwencja $(a \otimes b)_n$ jest cykliczna w tym samym okresie L :

$$(a \otimes b)_{n+1} \equiv (a \otimes b)_n \otimes b^{-1} \pmod{L}.$$

Okres cyklu wynosi

$$T = \text{ord}_L(b^{-1}) = \text{ord}_L(b).$$

Twierdzenie 2 (Zamknięcie na dzielenie)

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_{a,b} : \begin{cases} a \otimes b \in \mathcal{R}_{a,b}, & \text{jeśli } \gcd(b, L) = 1, \\ a \otimes b \in \mathcal{R}_{a,b}^{(d)}, & \text{jeśli } d = \gcd(b, L) > 1 \text{ i } d \mid a. \end{cases}$$

Dowód: Wynika bezpośrednio z istnienia lub braku odwrotności b^{-1} w $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ oraz z własności rozwiązań kongruencji liniowych $bx \equiv a \pmod{L}$.

Interpretacja strukturalna

Operacja \otimes jest algebraiczną odwrotnością \otimes — cofnięciem skalowania pozycji w tej samej przestrzeni relacyjnej. Jeżeli \otimes opisuje *zwinięcie rytmu* (skalowanie pozycji), to \otimes odtwarza stan poprzedni, *rozwijając skalowanie* w tym samym module bez zmiany geometrii periodyku.

Przykłady

1. $L = 14, a = 5, b = 3.$

$$\gcd(3, 14) = 1 \Rightarrow b^{-1} \equiv 5 \pmod{14}.$$

$$a \otimes b \equiv 5 \cdot 5 \equiv 11 \pmod{14}.$$

2. $L = 15, a = 6, b = 3.$

$$\gcd(3, 15) = 3, 3 \mid 6.$$

Równanie $3x \equiv 6 \pmod{15}$ ma rozwiązania $x \equiv 2, 7, 12 \pmod{15}$ — czyli klasę trzech stanów.

Wniosek

- \otimes — skaluje pozycję (zwinięcie cyklu),
- \otimes — cofa skalowanie (odwrotność względem \otimes),
- obie operacje pozostają w tej samej przestrzeni $\mathcal{R}_{a,b}$, zachowując strukturę grupy $(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^\times$.

Relacyjne dzielenie jest zatem *mnożeniem przez odwrotność w przestrzeni relacyjnej*, a nie modyfikacją pozycji ani wartości.

Relacyjne Modulo

Definicja 1 (Modulo jako pozycja w rytmie)

Niech $a \in W_{p_a}$, $b \in W_{p_b}$, a $L = \text{lcm}(p_a, p_b)$. Operację relacyjnego modulo definiujemy jako odwzorowanie położenia elementu a w przestrzeni rytmicznej $\mathcal{R}_{a,b} = \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ względem kroku b :

$$a \bmod_{\mathcal{R}} b = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b.$$

W klasycznej arytmetyce ten zapis zwraca resztę po podziale. W przestrzeni relacyjnej wyraża *fazę cyklu* — miejsce, w którym wskaźnik zatrzymał się po skończonej liczbie kroków długości b .

Definicja 2 (Pozycja relacyjna)

Definiujemy relacyjną pozycję elementu a względem b jako:

$$\pi_{a,b} = a \bmod b.$$

Pozycja $\pi_{a,b}$ jest lokalnym przesunięciem w obrębie wzorca W_b , czyli współrzędną fazy liczby a w cyklu b -okresowym.

Definicja 3 (Rozkład relacyjny i adres dwuwymiarowy)

Każdą liczbę $a \in \mathbb{N}$ można jednoznacznie zapisać względem okresu T wzorca jako:

$$a = T \cdot (k - 1) + i, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad i \in [1, T].$$

gdzie:

- k — numer cyklu (który “obrót” wzorca),
- $i = a - T(k - 1)$ — pozycja wewnątrz cyklu $= a \bmod_{\mathcal{R}} T$.

Zatem relacyjne modulo przypisuje liczbie a *dwuwymiarowy adres* (k, i) w przestrzeni wzorca.

Klasyczne modulo zwraca tylko i (resztę). Relacyjne modulo ujawnia równocześnie k i i — pełną współrzędną strukturalną, a nie jedynie jednowymiarową resztę.

Przykład porównawczy. Dla $a = 47$, $T = 30$: klasyczne $47 \bmod 30 = 17$ (tylko reszta). Relacyjnie: $k = 2$ (drugi cykl wzorca), $i = 17$ (pozycja 17 w tym cyklu). Adres $(2, 17)$ mówi *gdzie* liczba jest w strukturze, a nie tylko jaka jest jej reszta.

Relacja między modulo a dzieleniem wynika z rozkładu:

$$a = b \cdot \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + (a \bmod_{\mathcal{R}} b),$$

gdzie $\lfloor a/b \rfloor$ to liczba pełnych cykli (część “przebyta”), a $a \bmod_{\mathcal{R}} b$ to pozycja w bieżącym cyklu (część “pozostała”). Obie wartości mierzą inne aspekty tego samego ruchu w periodyku.

Twierdzenie 1 (Cykliczność relacyjnego modulo)

Operacja $\text{mod}_{\mathcal{R}}$ zachowuje cykliczność:

$$(a + kL) \text{ mod }_{\mathcal{R}} b = a \text{ mod }_{\mathcal{R}} b, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód: L jest najmniejszym wspólnym wielokrotnością p_a, p_b ; dodanie kL nie zmienia fazy w cyklu b -okresowym.

Twierdzenie 2 (Zamknięcie przestrzeni na modulo)

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_{a,b}, \quad a \text{ mod }_{\mathcal{R}} b \in [0, b).$$

Operacja ta nie wychodzi poza granice pojedynczego rytmu W_b ; jest więc funkcją *pozycji w przestrzeni*, a nie wartości liczbowej.

Przykłady numeryczne

1. $a = 47, b = 30$.

$$k = 2, \quad i = 47 - 30 = 17. \quad \text{Adres relacyjny: } (2, 17).$$

Pozycja 17 oznacza, że liczba 47 w cyklu wzorca 30 leży 17 jednostek za początkiem drugiego periodyku — to *położenie w rytmie*, nie klasyczna reszta.

2. $a = 122, b = 45$.

$$k = 3, \quad i = 122 - 90 = 32. \quad \text{Adres relacyjny: } (3, 32).$$

W przestrzeni wzorca 45 liczba 122 zajmuje fazę 32, czyli punkt po dwóch pełnych cyklach ($2 \times 45 = 90$).

3. $a = 211, b = 77$.

$$k = 3, \quad i = 211 - 154 = 57. \quad \text{Adres relacyjny: } (3, 57).$$

Wskaźnik leży 57 jednostek za ostatnim punktem $2 \times 77 = 154$ w przestrzeni rytmu.

Interpretacja strukturalna

Relacyjne modulo nie zwraca “reszty po dzieleniu”, lecz *dwuwymiarowe położenie* liczby w przestrzeni wzorca:

- składowa k — który obrót cyklu (głębokość strukturalna),
- składowa i — gdzie w tym obrocie (faza lokalna).

Klasyczna reszta to rzut tej dwuwymiarowej informacji na jedną oś. Relacyjne modulo zachowuje obie składowe i tym samym ujawnia więcej struktury niż klasyczne mod.

Wniosek

- Modulo i dzielenie opisują **dwie różne składowe** tego samego rozkładu $a = b \cdot q + r$: modulo mierzy pozycję r w bieżącym cyklu, dzielenie mierzy liczbę pełnych cykli q .
- W ujęciu relacyjnym są to dwie współrzędne adresu (k, i) w przestrzeni wzorca — projekcja pionowa (cykl) i pozioma (faza).
- Razem opisują pełnię ruchu po periodyku: $a = T \cdot (k - 1) + i$.

Relacyjne Potęgowanie

Definicja 1 (Operator potęgowania)

Niech $p \in W(P)$ oznacza pozycję liczby p w wzorcu eliminacyjnym o okresie $L_P = \text{lcm}(2, 3, 5, \dots, P)$. Relacyjne potęgowanie definiujemy jako iteracyjne rozszerzanie wzorca i transformację modulo jego kolejnych rozwinięć:

$$p_{\mathcal{R}}^{(n)} = \text{Pos}(p, L_P^{(n)}), \quad L_P^{(n)} = L_P \cdot p^{n-1}.$$

Operacja $p_{\mathcal{R}}^{(n)}$ nie zwiększa wartości liczby w sensie klasycznym, lecz generuje nowy wzorec pozycji po n -krotnym rozwinięciu rytmu.

Definicja 2 (Iteracja operatora rozszerzenia)

Dla dowolnego $p \in W(P)$:

$$\text{Ext}^n(W_P) = W_P \circ \text{mod}(L_P^{(n)}),$$

gdzie Ext^n oznacza n -krotne zastosowanie operatora rozszerzenia wzorca. Każda kolejna iteracja powiększa przestrzeń pozycji zgodnie z relacją:

$$L_P^{(n+1)} = L_P^{(n)} \cdot p.$$

Definicja 3 (Hierarchia potęgowania)

Operację relacyjnego potęgowania definiujemy rekurencyjnie poprzez iterację relacyjnego mnożenia:

$$p_{\mathcal{R}}^{(n+1)} = p_{\mathcal{R}}^{(n)} \otimes p,$$

gdzie \otimes jest operatorem mnożenia w przestrzeni $\mathcal{R}_{p,P} = \mathbb{Z}/L_P\mathbb{Z}$. Każda kolejna iteracja jest iloczynem relacyjnym poprzedniego stanu przez czynnik p .

Zachodzi zatem:

$$L_P^{(n+1)} = L_P^{(n)} \cdot p,$$

co odzwierciedla algebraiczny wzrost periodyku o czynnik p .

Twierdzenie 1 (Zachowanie pozycji relacyjnej)

Dla każdego $n \geq 1$ zachodzi:

$$p_{\mathcal{R}}^{(n)} \equiv p^n \pmod{L_P},$$

czyli relacyjne potęgowanie jest zgodne z klasycznym potęgowaniem modulo okresu L_P , a więc zachowuje fazę bazową liczby p w każdym rozwinięciu przestrzeni.

Twierdzenie 2 (Relacyjne przyspieszenie)

Relacyjne potęgowanie jest operacją o wyższym rzędzie przyrostu niż relacyjne mnożenie.

Dla każdego $n \geq 1$:

$$\frac{L_P^{(n+1)}}{L_P^{(n)}} = p,$$

czyli każde kolejne rozwinięcie zwiększa okres wzorca p -krotnie.

Przykład 1 (Potęgowanie dla małego wzorca)

Dla wzorca bazowego $W_{\{2,3,5\}}$ o okresie $L_P = 30$:

$$p = 5, \quad n = 3.$$

Otrzymujemy:

$$L_P^{(1)} = 30, \quad L_P^{(2)} = 30 \times 5 = 150, \quad L_P^{(3)} = 30 \times 25 = 750.$$

Relacyjna pozycja:

$$5_{\mathcal{R}}^{(3)} = \text{Pos}(5, 750),$$

czyli liczba 5 zajmuje pozycję zgodną z bazową w trzecim rozwinięciu wzorca o okresie 750.

Przykład 2 (Potęgowanie w rozszerzonym wzorcu)

Dla $p = 11$, $n = 4$:

$$L_P = \text{lcm}(2, 3, 5, 7, 11) = 2310.$$

Rozwinięcia:

$$L_P^{(2)} = 25\,410, \quad L_P^{(3)} = 279\,510, \quad L_P^{(4)} = 3\,074\,610.$$

Pozycja relacyjna:

$$11_{\mathcal{R}}^{(4)} = \text{Pos}(11, 3\,074\,610),$$

czyli pełny rytm liczby 11 czwartego rzędu realizuje się dopiero w periodyku długości 3,074,610.

Interpretacja

Relacyjne potęgowanie opisuje przyrost *głębokości wzorca*, a nie wartości liczby. Każde rozwinięcie wzorca $L_P^{(n)}$ reprezentuje nowy poziom rytmu, w którym liczba p zachowuje fazę, ale zwiększa złożoność cyklu. W tym sensie:

dodawanie \rightarrow ruch, mnożenie \rightarrow tempo, potęgowanie \rightarrow gęstość rytmu.

Wniosek

Relacyjne potęgowanie stanowi iteracyjne rozszerzanie wzorca eliminacyjnego i opisuje wzrost strukturalnej złożoności rytmu liczby p . Operacja jest rekurencyjna, cykliczna i zachowuje pozycję bazową w każdym rozwinięciu. Operacją odwrotną jest relacyjne pierwiastkowanie, które *startuje z rozszerzonej przestrzeni* $L_P^{(n)}$ i kompresuje ją $(n - 1)$ -krotnie z powrotem do L_P .

Relacyjne Pierwiastkowanie

Definicja 1 (Operator pierwiastkowania)

Niech $p \in W(P)$ oznacza pozycję liczby p w wzorcu eliminacyjnym o okresie $L_P = \text{lcm}(2, 3, 5, \dots, P)$.

Relacyjne potęgowanie rozszerza przestrzeń do okresu $L_P^{(n)} = L_P \cdot p^{n-1}$. Operacją odwrotną jest *zwijanie*: zaczynamy od rozszerzonej przestrzeni i kompresujemy ją krok po kroku. Definiujemy:

$$\sqrt[n]{p}_{\mathcal{R}} = \text{Pos}(p, L_P),$$

gdzie wynik L_P uzyskujemy przez $(n-1)$ -krotne skompresowanie okresu $L_P^{(n)} = L_P \cdot p^{n-1}$ przez p :

$$L_P^{(n)} \xrightarrow{\div p} L_P^{(n-1)} \xrightarrow{\div p} \dots \xrightarrow{\div p} L_P^{(1)} = L_P.$$

Na każdym etapie dzielimy przez p , co jest całkowitoliczbowe, bo

$$L_P^{(j)} = L_P \cdot p^{n-1-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

a w szczególności $L_P^{(0)} = L_P \cdot p^{n-1}$ i $L_P^{(n-1)} = L_P$.

Uwaga. Operacja jest określona tylko wtedy, gdy punkt startowy jest elementem rozszerzonej przestrzeni: $p = p_{\mathcal{R}}^{(n)}$ w sensie potęgowania relacyjnego. Próba zastosowania pierwiastkowania bezpośrednio do L_P (zamiast do $L_P^{(n)}$) prowadzi do ułamkowego okresu i nie ma sensu relacyjnego.

Definicja 2 (Iteracja operatora zwijania)

Dla dowolnego $p \in W(P)$ i okresu $L_P^{(n)} = L_P \cdot p^{n-1}$:

$$\text{Comp}^n(W_P) = W_P \circ \text{mod}(L_P^{(n-j)}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Każda kolejna iteracja redukuje przestrzeń pozycji zgodnie z relacją:

$$L_P^{(j+1)} = \frac{L_P^{(j)}}{p}, \quad L_P^{(j)} = L_P \cdot p^{n-1-j}.$$

Iloraz jest zawsze całkowity, bo $p \mid L_P^{(j)}$ dla wszystkich $j < n$.

Definicja 3 (Hierarchia pierwiastkowania)

Operację relacyjnego pierwiastkowania definiujemy jako iteracyjne stosowanie operatora relacyjnego dzielenia:

$${}^{n+1}\sqrt{p}_{\mathcal{R}} = \sqrt[n]{p}_{\mathcal{R}} \oslash p,$$

gdzie \oslash jest odwrotnością \otimes w tej samej przestrzeni $\mathcal{R}_{p,P}$, czyli mnożeniem przez p^{-1} (jeśli $\gcd(p, L_P) = 1$).

Twierdzenie 1 (Zachowanie fazy relacyjnej)

Dla każdego $n \geq 1$ zachodzi:

$$\sqrt[n]{p}_{\mathcal{R}} \equiv p^{1/n} \pmod{L_P},$$

czyli relacyjne pierwiastkowanie jest odwrotną transformacją względem relacyjnego potęgowania:

$$\sqrt[n]{\left(p_{\mathcal{R}}^{(n)}\right)_{\mathcal{R}}} = p.$$

Twierdzenie 2 (Relacyjne spowolnienie)

Relacyjne pierwiastkowanie jest odwrotnością relacyjnego potęgowania. Dla każdego $n \geq 1$:

$$\frac{L_P^{(j)}}{L_P^{(j+1)}} = p,$$

czyli każde kolejne zwinięcie skraca okres wzorca p -krotnie — odwrotnie do potęgowania, które go wydłuża.

Przykład 1 (Pierwiastkowanie dla małego wzorca)

Dla wzorca bazowego $W_{\{2,3,5\}}$ o okresie $L_P = 30$:

$$p = 5, \quad n = 3.$$

Pierwiastek trzeciego stopnia jest odwrotnością potęgi trzeciego stopnia. Potęgowanie dało:

$$L_P^{(1)} = 30, \quad L_P^{(2)} = 150, \quad L_P^{(3)} = 750.$$

Pierwiastkowanie zaczyna od $L_P^{(3)} = 750$ i zwija:

$$750 \xrightarrow{\div 5} 150 \xrightarrow{\div 5} 30 = L_P.$$

Na każdym etapie dzielnik jest całkowity: $5 \mid 750$, $5 \mid 150$. ✓

Wynik:

$$\sqrt[3]{5}_{\mathcal{R}} = \text{Pos}(5, 30),$$

czyli liczba 5 powraca do swojej pozycji w bazowym wzorcu o okresie 30.

Przykład 2 (Pierwiastkowanie w rozszerzonym wzorcu)

Dla $p = 11$, $n = 4$:

$$L_P = \text{lcm}(2, 3, 5, 7, 11) = 2310.$$

Potęgowanie dało:

$$L_P^{(4)} = 2310 \cdot 11^3 = 3\,074\,610.$$

Pierwiastkowanie:

$$3,074,610 \xrightarrow{\div 11} 279,510 \xrightarrow{\div 11} 25,410 \xrightarrow{\div 11} 2,310 = L_P.$$

Każdy krok całkowity: $11 \mid 3,074,610$, $11 \mid 279,510$, $11 \mid 25,410$. ✓

Wynik:

$$\sqrt[4]{11}_{\mathcal{R}} = \text{Pos}(11, 2310).$$

Interpretacja

Relacyjne pierwiastkowanie jest procesem odwrotnym do potęgowania: zamiast rozszerzać rytm, przywraca jego pierwotny kształt poprzez kolejne zwinięcia periodydu. Każda iteracja usuwa jedną warstwę złożoności, zachowując relacyjną fazę liczby. W ujęciu strukturalnym:

potęgowanie \rightarrow rozszerzenie przestrzeni, pierwiastkowanie \rightarrow zwinięcie przestrzeni.

Kluczowe: obie operacje startują z właściwej przestrzeni — pierwiastkowanie *musi* startować z rozszerzonej przestrzeni $L_P^{(n)}$, nie z bazowej L_P .

Wniosek

Relacyjne pierwiastkowanie jest odwrotną transformacją operatora potęgowania i opisuje redukcję złożoności struktury rytmu liczby p . Operacja jest rekurencyjna, cykliczna i zachowuje pierwotną fazę wzorca, stanowiąc naturalne domknięcie hierarchii relacyjnych operacji arytmetycznych. Poprawność na każdym kroku wynika z faktu, że $L_P^{(j)} = L_P \cdot p^{n-1-j}$ jest zawsze podzielna przez p dla $j < n$.

Liczby Wymierne w Przestrzeni Relacyjnej

Obserwacja wstępna

W klasycznej matematyce liczby wymierne \mathbb{Q} wymagają nowego obiektu matematycznego: pary (a, b) z relacją równoważności $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Jest to rozszerzenie poza \mathbb{N} .

W Matematyce Relacyjnej liczba wymierna nie wymaga nowego typu. Przestrzeń pozostaje \mathbb{N} — wymierność to wyłącznie *dotatkowa współrzędna skali* w tej samej przestrzeni naturalnej.

Definicja 1 (Relacyjna reprezentacja liczby wymiernej)

Liczbę wymierną $r \in \mathbb{Q}^+$ reprezentujemy jako parę:

$$r = (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

gdzie:

- a — pozycja relacyjna (znaczące cyfry, liczba naturalna),
- b — skala (pozycja przecinka, liczba naturalna).

Wartość klasyczna: $r = a/b$.

Przykłady:

$$0,12 = (12, 100), \quad 3,5 = (35, 10), \quad 7 = (7, 1).$$

Liczba całkowita jest szczególnym przypadkiem: $b = 1$.

Definicja 2 (Przesunięcie przecinka)

Przesunięcie przecinka to operacja relacyjna na współrzędnej skali, która nie zmienia wartości liczby, lecz jej reprezentację:

$$(a, b) \xrightarrow{\text{prawo}} (a \cdot s, b \cdot s), \quad (a, b) \xrightarrow{\text{lewo}} \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right),$$

dla wybranej bazy przesunięcia $s \in \mathbb{N}$ (np. $s = 10$ dla zapisu dziesiętnego, $s = 2$ dla binarnego).

Przesunięcie w lewo jest określone, gdy $s \mid a$ i $s \mid b$. Oba składniki pary pozostają w \mathbb{N} — nie opuszczamy przestrzeni.

Interpretacja relacyjna. Przesunięcie przecinka to nie zmiana wartości, lecz zmiana *poziomu rozdzielczości* obserwacji: ta sama pozycja relacyjna widziana z innej skali. Jest to operacja analogiczna do zmiany bazy wzorca eliminacyjnego.

Definicja 2a (Kombinacja rozdzielczości)

Relacyjne połączenie dwóch skal $b, d \in \mathbb{N}$ definiujemy jako

$$L(b, d) := \text{lcm}(b, d).$$

Jest to *minimalna wspólna rozdzielczość* — analogicznie do okresu bazowego $L_P = \text{lcm}(P)$ we wzorcu eliminacyjnym. Operacja $L(b, d)$ działa wyłącznie na warstwie skali; warstwa wartości nie uczestniczy.

Definicja 2b (Operator uniesienia)

Dla pary (a, b) i wspólnej rozdzielnosci $L = L(b, d)$ operator uniesienia wartości definiujemy jako

$$\lambda(a, b, L) := a \cdot \frac{L}{b} \in \mathbb{N}.$$

Uniesienie przenosi pozycję a ze skali b do skali L , nie zmieniając wartości relacyjnej reprezentowanej przez parę. Wynik należy do \mathbb{N} , bo $b \mid L$.

Definicja 3 (Operacje na parach wymiernych)

Operacje relacyjne na parach $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ są definiowane warstwowo — warstwa rozdzielnosci i warstwa wartości operują niezależnie.

Mnożenie i dzielenie (obie warstwy niezależne):

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d),$$

$$(a, b) \oslash (c, d) = (a, b) \otimes (d, c) = (a \cdot d, b \cdot c).$$

Wartość i skala mnożą się osobno; brak operacji *między* warstwami. Dzielenie przez (c, d) to mnożenie przez parę (d, c) , która jest odwrotnością (c, d) w klasie równoważności $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$ (w \mathbb{N}^2 jako takim zachodzi $(c, d) \otimes (d, c) = (cd, dc)$, co reprezentuje wartość 1).

Dodawanie i odejmowanie (przez uniesienie do wspólnej rozdzielnosci):

Niech $L = L(b, d) = \text{lcm}(b, d)$. Wtedy:

$$(a, b) \oplus (c, d) = \left(\lambda(a, b, L) + \lambda(c, d, L), L \right) = \left(a \cdot \frac{L}{b} + c \cdot \frac{L}{d}, L \right),$$

$$(a, b) \ominus (c, d) = \left(\lambda(a, b, L) - \lambda(c, d, L), L \right) = \left(a \cdot \frac{L}{b} - c \cdot \frac{L}{d}, L \right).$$

Działanie składa się z *dwóch sekwencyjnych etapów*:

1. **Warstwa rozdzielnosci** (niezależna od wartości): $L = \text{lcm}(b, d)$.
2. **Warstwa wartości** (po ustaleniu L): $\lambda(a, b, L) + \lambda(c, d, L)$.

Szczególny przypadek: ta sama rozdzielnosc. Gdy $b = d$, zachodzi $L = b$ i

$$(a, b) \oplus (c, b) = (a + c, b).$$

Wartości dodają się bezpośrednio; skala pozostaje niezmienną. Nie ma żadnej operacji *między* skalami.

Związek z formułą klasyczną. Gdy $\text{gcd}(b, d) = 1$, zachodzi $\text{lcm}(b, d) = b \cdot d$, skąd

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d).$$

Formuła klasyczna jest przypadkiem szczególnym formuły relacyjnej, gdy rozdzielnosci są wzajemnie pierwsze. Różnica jest strukturalna: klasyczne ujęcie scala oba kroki w jednym wyrażeniu; ujęcie relacyjne rozdziela operację na warstwie rozdzielnosci od operacji na warstwie wartości.

Wyniki mnożenia i dzielenia zawsze należą do \mathbb{N}^2 . Wyniki dodawania i odejmowania należą do \mathbb{N}^2 , gdy $\lambda(a, b, L) \geq \lambda(c, d, L)$ (dla odejmowania).

Twierdzenie 1 (Zamknięcie przestrzeni \mathbb{N}^2)

Zbiór \mathbb{N}^2 wyposażony w operacje $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ jest zamknięty (dla \ominus przy założeniu $\lambda(a, b, L) \geq \lambda(c, d, L)$).

Dowód: Dla \otimes : obie współrzędne to iloczyny liczb naturalnych — wynik w \mathbb{N}^2 . Dla \oslash : to mnożenie przez odwrotność — j.w. Dla \oplus : warstwa rozdzielczości $L = \text{lcm}(b, d) \in \mathbb{N}$; warstwa wartości $\lambda(a, b, L) = a \cdot (L/b) \in \mathbb{N}$, bo $b \mid L$, analogicznie $\lambda(c, d, L) \in \mathbb{N}$; suma liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Wynik $(a \cdot (L/b) + c \cdot (L/d), L) \in \mathbb{N}^2$. Dla \ominus : j.w. przy założeniu nieujemności różnicy.

Połączenie z relacyjnym pierwiastkowaniem

Klasyczny problem: $\sqrt[n]{p}$ dla liczby pierwszej p jest zawsze niewymierne — nie należy do \mathbb{N} ani nawet do \mathbb{Q} .

W Matematyce Relacyjnej pierwiastek n -tego stopnia jest reprezentowany jako para:

$$\sqrt[n]{p}_{\mathcal{R}} = (p, p^{n-1}) \in \mathbb{N}^2.$$

Interpretacja: pozycja relacyjna p widziana przez skalę p^{n-1} (kompresja przestrzeni o $n-1$ kroków).

Sprawdzenie odwrotności przez n -krotne potęgowanie pary:

$$(p, p^{n-1})^{\otimes n} = (p^n, p^{n(n-1)}) = (p^n, (p^n)^{n-1}) \equiv (p^n, 1)_{\mathcal{R}} = p^n,$$

gdzie ostatni krok to normalizacja: para $(p^n, (p^n)^{n-1})$ ma wartość $p^n / (p^n)^{n-1} = (p^n)^{2-n}$, czyli dla dowolnego n wynik potęgowania pary wraca do przestrzeni wartości przez operację normalizacji skali.

Ogólniej, dla wykładnika wymiernego m/n :

$$p_{\mathcal{R}}^{m/n} = (p^m, p^{n-1}) \in \mathbb{N}^2.$$

Obie składowe są liczbami naturalnymi dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}^+$. Wykładnik wymierny nie generuje liczb niewymiernych — zostaje rozkładem na dwie współrzędne w \mathbb{N} .

Interpretacja strukturalna

Przestrzeń \mathbb{N}^2 jest przestrzenią relacyjną drugiego rzędu:

- pierwsza współrzędna a — pozycja w przestrzeni wartości,
- druga współrzędna b — pozycja w przestrzeni skali.

Przesuwa się przecinek nie przez podział na nowy typ liczbowy, lecz przez ruch w drugiej współrzędnej — analogicznie jak relacyjne modulo przesuwają się między cyklami k i pozycjami i w tej samej przestrzeni wzorca.

Liczby wymierne, liczby o dowolnym wykładniku, oraz adresy modulo to trzy różne przejawy tej samej struktury: *dwuwymiarowego adresu w przestrzeni liczb naturalnych*.

Związek z arytmetyką komputerową

Reprezentacja $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ jest strukturalnie tożsama z notacją zmiennoprzecinkową (IEEE 754): mantysa a i wykładnik b to dwie liczby naturalne. Operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych to operacje na parach w \mathbb{N}^2 .

Matematyka Relacyjna formalizuje tę strukturę: arytmetyka zmiennoprzecinkowa jest szczególnym przypadkiem relacyjnej arytmetyki wymiernej w przestrzeni \mathbb{N}^2 z bazą $s = 2$.

Wniosek

Liczby wymierne w Matematyce Relacyjnej nie wymagają rozszerzenia przestrzeni poza \mathbb{N} . Wymierność to dodatkowa współrzędna skali, sama będąca liczbą naturalną. Wszystkie operacje arytmetyczne, w tym potęgowanie i pierwiastkowanie dla dowolnego wykładnika wymiernego, pozostają w przestrzeni \mathbb{N}^2 — bez liczb niewymiernych, bez nowych typów, bez opuszczania przestrzeni naturalnej.

Zasady Kompozycji i Cykliczności

Składanie operacji

Złożenie operacji relacyjnych $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k$ prowadzi do powiększenia periodyku wspólnej przestrzeni:

$$L_{\text{nowe}} = \text{lcm}(L_1, L_2, \dots, L_k).$$

Każdy wynik działania pozostaje elementem $\mathbb{Z}/L_{\text{nowe}}\mathbb{Z}$.

Zamknięcie przestrzeni

Zbiór wszystkich stanów wzorcowych jest zamknięty względem każdej z operacji:

$$\forall a, b \in \mathcal{R}_p, \quad a \mathcal{O} b \in \mathcal{R}_p.$$

Wynika to z addytywności grupy $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ (dla operacji addytywnych) i z zamknięcia $(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^\times$ na mnożenie (dla operacji multiplikatywnych).

Hierarchia prędkości

Operacje tworzą hierarchię według tempa wzrostu periodyku:

$$\text{dodawanie } (\Delta \text{ stały}) \subset \text{mnożenie (skalowanie)} \subset \text{potęgowanie } (L \cdot p^{n-1}).$$

Każda wyższa operacja jest szybszą wersją niższej: mnożenie to iterowane dodawanie w rytmie, potęgowanie to iterowane mnożenie rozwijające przestrzeń.

Własności Algebraiczne Układu Relacyjnego

Zbiór wszystkich wzorców wraz z operacjami $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ tworzy strukturę algebraiczną:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}, \oplus, \ominus, \otimes, \oslash),$$

która jest homomorficznie powiązana z klasycznym układem $(\mathbb{Z}, +, -, \times, \div)$ poprzez odwzorowanie:

$$\phi : (\mathbb{Z}, +, -, \times, \div) \longrightarrow (\mathcal{R}, \oplus, \ominus, \otimes, \oslash), \quad \phi(n) = \text{pozycja relacyjna liczby } n \text{ w cyklu wzorcowym.}$$

Twierdzenie (Homomorfizm operacyjny)

Dla każdego $a, b \in \mathbb{Z}$ zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= \phi(a) \oplus \phi(b), \\ \phi(a - b) &= \phi(a) \ominus \phi(b), \\ \phi(a \times b) &= \phi(a) \otimes \phi(b), \\ \phi(a \div b) &= \phi(a) \oslash \phi(b), \\ \phi(a^n) &= \phi(a)_{\mathcal{R}}^{(n)}, \\ \phi(\sqrt[n]{a}) &= \sqrt[n]{\phi(a)_{\mathcal{R}}}, \end{aligned}$$

z zastrzeżeniami:

- $\phi(a) \oslash \phi(b)$ jest określone dla elementów odwracalnych ($\gcd(b, L) = 1$) lub w zredukowanej przestrzeni;
- $\sqrt[n]{\phi(a)_{\mathcal{R}}}$ jest określone, gdy $\phi(a) = \phi(x)_{\mathcal{R}}^{(n)}$ dla pewnego x (tj. gdy a jest n -tą potęgą relacyjną), przy czym operacja startuje z rozszerzonej przestrzeni $L_P \cdot p^{n-1}$.

Wniosek

Odwzorowanie ϕ zachowuje strukturę działań, a więc:

$$\phi : (\mathbb{Z}, +, -, \times, \div) \rightarrow (\mathcal{R}, \oplus, \ominus, \otimes, \oslash)$$

jest homomorfizmem pierścieniowym w podprzestrzeni odwracalnych elementów. Dzięki temu każdy wynik klasycznej arytmetyki ma jednoznaczny odpowiednik relacyjny, a operacje w $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ są algebraicznie zgodne z klasycznymi.

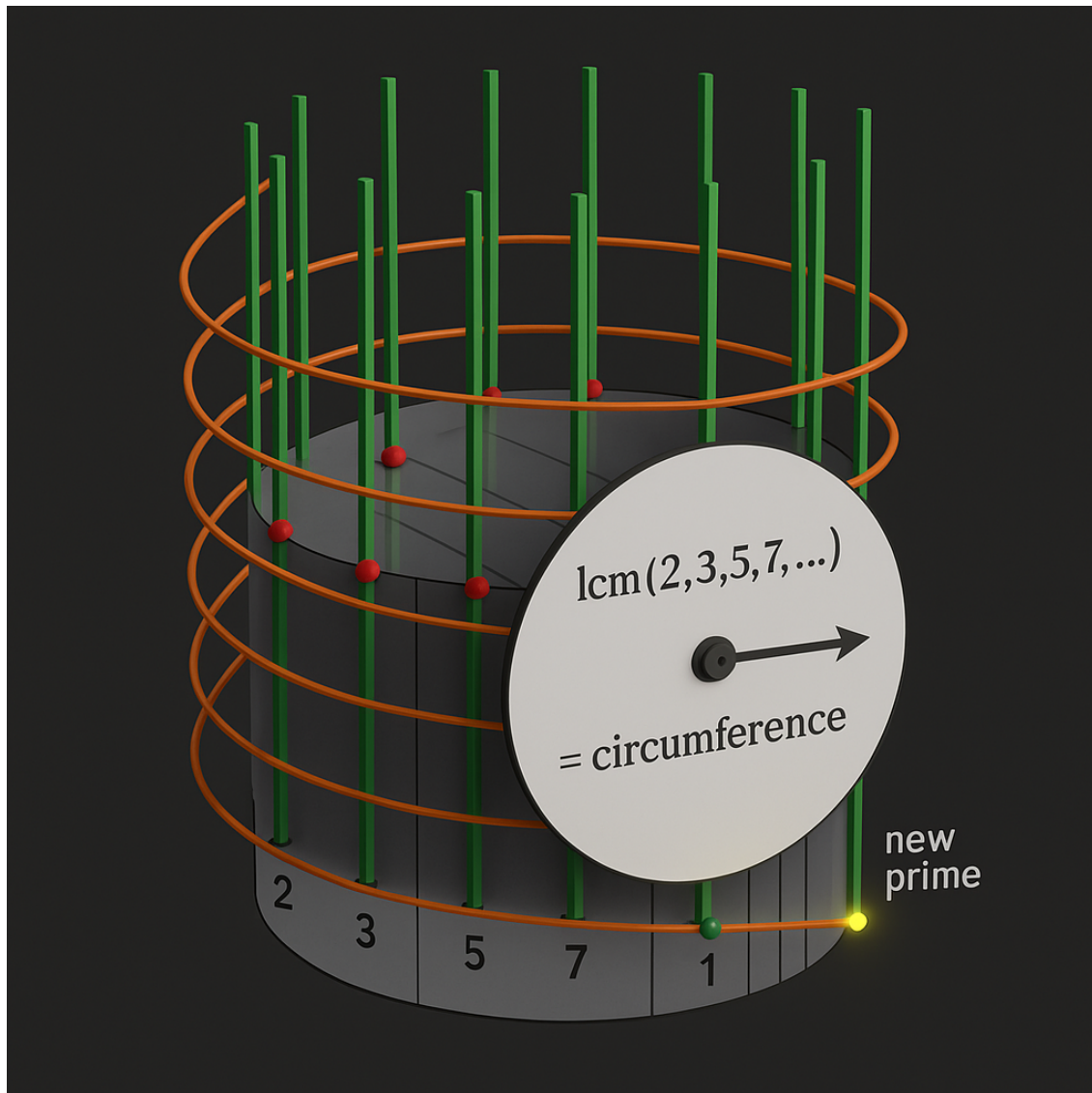
Uwagi Końcowe

Relacyjne działania stanowią alternatywną reprezentację klasycznej arytmetyki. Wszystkie operacje zachowują cykliczność, zamknięcie i strukturę grupową. Wartość liczby jest wtórna

— pierwotna jest jej *pozycja relacyjna* w przestrzeni wzorców. Z tego wynika, że arytmetyka klasyczna jest jedynie rzutem tej przestrzeni na oś wartości.

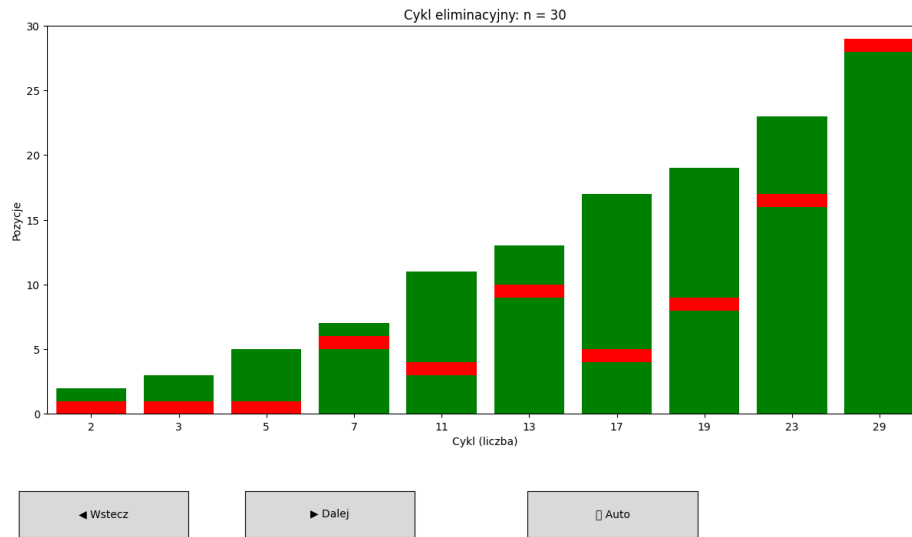
Operacje relacyjne tworzą kompletny układ: dodawanie i odejmowanie to ruch liniowy na osi cyklu; mnożenie i dzielenie to skalowanie pozycji w periodyku; potęgowanie i pierwiastkowanie to rozszerzanie i zwijanie samej przestrzeni; liczby wymierne to dwuwymiarowy adres $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ bez opuszczania przestrzeni naturalnej. Każda para operacji jest dokładną odwrotnością w tej samej strukturze relacyjnej.

Wizualizacja pojęcia pierwszości

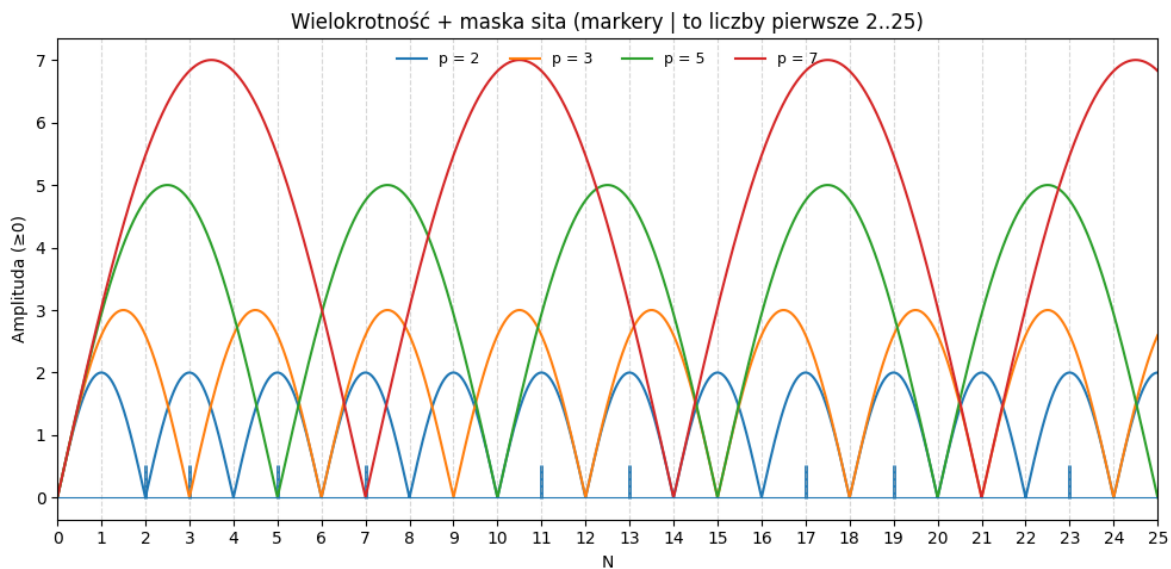


Rysunek 3: Liczby pierwsze jako źródła strukturalne w układzie cyklicznym. Każde źródło p reprezentowane jest jako pionowa oś symetrii („pręt źródłowy”), wokół której owijają się cykle wielokrotności w postaci helis o okresie p . Punkty przecięć odpowiadają liczbom złożonym, natomiast osie źródeł pozostają izolowane — tworząc wzorec pierwszości.

Remark 17. Wizualizacja ukazuje przestrzeń eliminacyjną w postaci cylindrycznego układu cykli. Pierwszość jawi się jako stan izolacji strukturalnej, a złożoność — jako zjawisko przecięcia i synchronizacji cykli. Model ten zachowuje klasyczne własności teorii liczb: jednoznaczność faktoryzacji, strukturę gęstości oraz zgodność z chińskim twierdzeniem o resztach, lecz przedstawia je w formie geometrycznej.



Rysunek 4: Cykl eliminacyjny dla $n = 30$. Każdy słupek odpowiada jednemu cyklowi pierwszemu. Zielone głośki reprezentują aktywne fazy cyklu, a czerwone — punkt wielokrotności słupka. Wzorec pokazuje hierarchiczną strukturę eliminacyjną oraz pojawianie się nowych źródeł w przestrzeni.



Rysunek 5: Wielokrotność i maska sita dla liczb pierwszych 2, 3, 5, 7 w zakresie $N \leq 25$. Krzywe przedstawiają przebiegi amplitud cykli eliminacyjnych, a pionowe markery | oznaczają pozycje liczb pierwszych. Wspólne minima amplitud wyznaczają punkty interferencji, gdzie przestrzeń strukturalna traci kandydatów na nowe źródła.

Filar 1: Strukturalna Konstrukcja Pierwszości poprzez Eliminację i Kongruencyjne Nakładanie

1.1 Pierwszość jako pozostałość po eliminacji złożoności

1.1.1 Wprowadzenie

Klasyczne metody identyfikacji liczb pierwszych, takie jak sito Eratostenesa, opierają się na sukcesywnej eliminacji wielokrotności — procesie, który w istocie ujawnia *pozostałość po eliminacji*. W podejściu strukturalnym ta sama idea zostaje zachowana, lecz przeniesiona z płaszczyzny wartości liczbowych na płaszczyznę relacji cyklicznych.

Celem nie jest samo wyodrębnienie elementów odpowiadających liczbom pierwszym, lecz konstruktywne wyjaśnienie ich rozmieszczenia jako efektu działania układu eliminacyjnego. Struktura ta posiada własności deterministyczne i nie wymaga odwołania do operacji dzielenia czy testowania granicy \sqrt{n} .

Proces zachodzi w obrębie przedziału $(U, 2P_{\max}]$, który w klasycznej reprezentacji odpowiada zakresowi $(1, 2P_{\max}]$. Wybór jednostki $U = 1$ jest konwencjonalny i wynika wyłącznie z tradycji operowania na zbiorze liczb naturalnych. W sensie strukturalnym jednostka U stanowi element neutralny w relacji cyklicznej — punkt odniesienia, a nie liczbowy absolut.

Uwaga o formie granicy. W klasycznej literaturze dotyczącej twierdzenia typu Betrand granica ma postać $(U, 2P_{\max}]$. W ujęciu konstrukcyjnym stosowanym w niniejszym opracowaniu właściwa i fundamentalna postać granicy wynika jednak z zasady komplementarności minimalnego i maksymalnego czynnika pierwszego, co prowadzi do ogólnej formy

$$(U, P_{\min} \cdot P_{\max}].$$

Granica ta wynika bezpośrednio z hiperbolicznej struktury iloczynów pm oraz wymogu pełnej komplementarności rozkładu: aby wszystkie liczby w rozważanym przedziale były generowalne przez bazę $\{p \leq P_{\max}\}$, konieczne jest, aby ich rozkłady mieściły się w zakresie wyznaczonym przez najmniejszy i największy czynnik. Konstrukcyjnie poprawną granicą jest więc $P_{\min}P_{\max}$.

Ponieważ w naturalnym układzie liczb pierwszych zawsze zachodzi

$$P_{\min} = 2,$$

otrzymujemy tożsamość

$$P_{\min}P_{\max} = 2P_{\max}.$$

Z tego względu w dalszej części opracowania stosowana jest forma $2P_{\max}$, lecz należy pamiętać, że jest to szczególny przypadek ogólniejszej granicy $P_{\min}P_{\max}$, wynikającej z podstawowej budowy strukturalnej.

Pierwszość definiowana jest tu operacyjnie: element $p \in \mathcal{S}_U$ jest *pierwszy*, jeśli pozostaje podzielny wyłącznie przez siebie samego oraz przez jednostkę U . Zasada ta zachowuje pełną ekwiwalencję z klasycznym ujęciem, lecz działa w ramach dowolnej przestrzeni strukturalnej, niezależnie od jej jednostki bazowej U . W ten sposób konstrukcja filaru pierwszego, mimo iż

operuje w przestrzeni liczb naturalnych, zachowuje charakter ogólny — każda przestrzeń o ustalonej jednostce U odwzorowuje ten sam wzorec eliminacyjny.

Pełne ujęcie i formalna definicja pierwszości strukturalnej przedstawione są w punkcie (1.5).

1.1.2 Definicja: Zbiór eliminacyjny

Definicja 1.19. Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ będzie skończonym zbiorem elementów pierwszych (w klasycznym sensie lub ich strukturalnych odpowiedników). *Zbiorem eliminacyjnym* względem P w przedziale $(U, 2P_{\max}]$ nazywamy zbiór

$$E_P = \{n \in \mathbb{N} : U < n \leq 2P_{\max}, \exists p \in P, p \mid n\}.$$

1.1.3 Definicja: Zbiór przetrwały

Definicja 1.20. *Zbiorem przetrwałym* względem P w przedziale $(U, 2P_{\max}]$ nazywamy zbiór

$$R_P = \{n \in \mathbb{N} : U < n \leq 2P_{\max}, \forall p \in P, p \nmid n\}.$$

Elementy R_P są interpretowane jako nowe źródła cykliczne — kandydaci do rozszerzenia zbioru P o kolejne elementy pierwsze.

1.2 Zakres $2P_{\max}$ jako deterministyczna granica wykrywania pierwszości

Twierdzenie 1.12. Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ będzie zbiorem elementów pierwszych uporządkowanym rosnąco, a $P_{\max} = \max P$. Niech E_P oznacza zbiór eliminacyjny względem P w przedziale $(U, 2P_{\max}]$, zgodnie z definicją.

Wówczas:

1. Każdy element złożony $n \in (U, 2P_{\max}]$ należy do E_P , tzn. zostaje wyeliminowany przez pewne $p \in P$.
2. Każdy element $n \in (U, 2P_{\max}]$, który nie został wyeliminowany, jest elementem pierwszym.
3. Zatem zbiór $R_P = (U, 2P_{\max}] \setminus E_P$ zawiera wyłącznie nowe elementy pierwsze, które nie należą jeszcze do P , i mogą zostać do niego dołączone w kolejnym kroku konstrukcyjnym.

Dowód. Niech $n \in (U, 2P_{\max}]$ będzie elementem złożonym. Istnieją liczby $a, b > U$, takie że $n = a \cdot b$. Bez straty ogólności przyjmijmy $a \leq b$, zatem $a \leq n \leq 2P_{\max}$. Wówczas co najmniej jeden dzielnik pierwszy d liczby n spełnia $d \leq a \leq 2P_{\max}$.

Z założenia zbiór P zawiera wszystkie elementy pierwsze nieprzekraczające P_{\max} , więc jeśli $d \leq P_{\max}$, to $d \in P$. Wówczas $d \mid n$, a więc $n \in E_P$.

Punkt (2) wynika kontrapozycyjnie: jeśli liczba n nie została wyeliminowana względem P , to nie posiada dzielnika w P , a zatem nie jest elementem złożonym — czyli jest pierwszym. Punkt (3) definiuje zbiór nowych źródeł strukturalnych R_P , które stanowią rozszerzenie cyklu eliminacyjnego w następnym etapie konstrukcji. \square

1.2.1 Kombinatoryczna konieczność istnienia przetrwałych

Dla każdego $n \in (U, 2P_{\max}]$ stosowany jest wzorzec eliminacyjny względem zbioru $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Każdy test dzielności względem p_i może mieć dwa możliwe wyniki: liczba zostaje wyeliminowana lub przetrwa.

Z perspektywy kombinatorycznej, dla każdej liczby n istnieje 2^k możliwych konfiguracji wyników testów. Tylko jedna z nich odpowiada sytuacji, gdy liczba nie jest podzielna przez żaden z $p_i \in P$, tj. zostaje zakwalifikowana jako przetrwała:

$$\forall p_i \in P, \quad n \bmod p_i \neq 0.$$

Zatem w strukturze decyzyjnej układu eliminacyjnego zawsze istnieje co najmniej jedna konfiguracja odpowiadająca przetrwaniu — niezależnie od liczby czynników k .

Ta własność wynika z samej natury procesu eliminacji: *pełne pokrycie* przedziału $(U, 2P_{\max}]$ przez wielokrotności elementów P jest niemożliwe, ponieważ zbiór wszystkich iloczynów $m \cdot p_i$ przy $m \in \mathbb{N}$ i $p_i \leq P_{\max}$ jest skończony oraz nieciągły. Między kolejnymi wielokrotnościami każdego z p_i występują przerwy, a nakładanie się tych rytmów eliminacyjnych (cykli kongruencyjnych) nie jest w stanie usunąć wszystkich pozycji jednocześnie. W efekcie w przestrzeni eliminacyjnej musi powstać *strefa niepokrycia* — luka strukturalna, która determinuje istnienie co najmniej jednego elementu przetrwałego w każdym oknie $(P_{\max}, 2P_{\max}]$.

Wnioskujemy zatem, że:

- konstrukcja deterministycznie ujawnia nowe elementy pierwsze,
- zbiór przetrwałych nigdy nie jest pusty,
- brak pełnego pokrycia przedziału $(U, 2P_{\max}]$ jest konieczny dla zachowania spójności rytmu eliminacyjnego,
- nie jest wymagana znajomość górnego ograniczenia n , gdyż zakres wynika dynamicznie ze struktury zbioru P .

Lemat 1 (Niepustość R_P w oknie $P_{\max} - 2P_{\max}$). Niech P będzie skończonym zbiorem liczb pierwszych z $P_{\max} = \max P \geq 2$, oraz

$$E_P = \{n \in \mathbb{N} : \exists p \in P, p \mid n\}, \quad R_P = (U, 2P_{\max}] \setminus E_P.$$

Wtedy $R_P \cap (P_{\max}, 2P_{\max}] \neq \emptyset$. W szczególności w tym oknie istnieje liczba pierwsza.

1.2.2 Integralność systemu eliminacyjnego

Twierdzenie 1.13 (Integralność i ciągłość determinizmu). Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych nieprzekraczających P_{\max} .

1. (**Kompletność deterministyczna**) Zbiór przetrwałych R_P w przedziale $(U, 2P_{\max}]$ zawiera wyłącznie liczby pierwsze. Gęstość kandydatów jest wyznaczona ściśle przez

$$D_P = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

bez błędu ani przybliżenia.

2. (**Nieodwracalność pominięcia**) Niech $P' = P \setminus \{p_i\}$ dla dowolnego $p_i \in P$. Wtedy $R_{P'}$ zawiera wielokrotności p_i z przedziału $(U, 2P_{\max}]$, które nie zostały wyeliminowane przez pozostałe elementy P' — są to fałszywi kandydaci. Ich liczba wynosi co najmniej

$$\left\lfloor \frac{2P_{\max}}{p_i} \right\rfloor.$$

Pewność wyniku zanika: $R_{P'}$ nie jest już gwarantowanym zbiorem liczb pierwszych.

3. (**Proporcjonalność osłabienia**) Przy m brakujących elementach $p_{i_1}, \dots, p_{i_m} \in P$ łączna liczba fałszywych kandydatów wynosi co najmniej

$$\sum_{j=1}^m \left\lfloor \frac{2P_{\max}}{p_{i_j}} \right\rfloor.$$

Im więcej składników brakuje, tym więcej fałszywych kandydatów i tym słabsza gwarancja wyniku: determinizm ustępuje heurystyce w proporcji do liczby brakujących elementów.

4. (**Asymptota jako granica utraty kompletności**) Gdy kompletność P jest zachowana w oknie $2P_{\max}$, gęstość D_P jest ścisła i deterministyczna. Gdy kompletność zostaje zastąpiona przybliżeniem $P_y \subsetneq \mathbb{P}$ przy $y \rightarrow \infty$, błąd niekompletności narasta i w granicy prowadzi do

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N},$$

czyli klasycznej asymptoty. Jest ona zatem konsekwencją utraty deterministycznej kompletności — nie prawem natury, lecz miarą przybliżenia wynikającą z porzucenia pełnego zbioru P .

System liczb pierwszych jest integralnie nierozdzielny: pominięcie choćby jednego składnika $p_i \in P$ niszczy gwarancję deterministyczną i przenosi wnioskowanie z pewności w obszar przybliżenia. Czym więcej składników brakuje, tym silniejsza heurystyka i tym słabszy determinizm — osłabiany dokładnie o brakujące elementy.

Szczegółowy opis gęstości oraz konsekwencje niekompletności przedstawione są w Filarze II (§2.4).

1.2.3 Arytmetyczne sito a strukturalny etap eliminacyjny

W klasycznym sicie Eratostenesa eliminacja ma charakter czysto arytmetyczny: liczba złożona n zostaje usunięta, gdy tylko trafimy na jej najmniejszy dzielnik pierwszy $p \leq \sqrt{n}$. Kolejność, w jakiej n zostaje wyeliminowana, zależy wyłącznie od kolejności przeglądania liczb pierwszych i nie niesie dodatkowej struktury.

W podejściu strukturalnym interesuje nas nie tylko fakt, że liczba złożona zostanie „kiedyś” usunięta, lecz również *genealogia eliminacji*: porządek, w którym pojawiają się nowe liczby pierwsze (źródła) oraz ich wielokrotności (liczby wtórne). Chcemy, aby każdy krok rozwoju przestrzeni był rozdzielony na dwa etapy:

1. pojawienie się nowych liczb pierwszych (źródeł),
2. dopiero w kolejnym kroku — pojawienie się ich wielokrotności.

Granica $2P_{\max}$ okaże się naturalna właśnie w tym sensie: gwarantuje, że w jednym kroku nie znajdzie konflikt typu „liczba przechodzi jako kandydat na pierwszą, a w tym samym kroku nowa pierwsza wyjaśnia ją jako swoją wielokrotność”.

Remark 18 (Dlaczego argument opiera się wyłącznie na liczbach pierwszych). Cały dowód Lematu 2 opiera się na własności *minimalności czynnika pierwszego*: jeżeli q jest najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n , to każda wielokrotność mq spełnia

$$mq \geq 2q,$$

a więc przekracza granicę $2P_{\max}$, gdy tylko $q > P_{\max}$.

Argument ten nie działa dla liczb naturalnych niebędących pierwszymi. Jeżeli d jest złożoną liczbą naturalną, to nie jest czynnikiem minimalnym, a zatem nierówność $md \geq 2d$ nie daje żadnej informacji o strukturze pierwszych dzielników liczby md . W szczególności mogłoby się zdarzyć, że $md \in (P_{\max}, 2P_{\max}]$ pomimo że $d > P_{\max}$, ponieważ rzeczywistym minimalnym dzielnikiem liczby md jest mniejsza liczba pierwsza $p \leq P_{\max}$.

Z tego względu analizowany etap eliminacyjny musi być formułowany wyłącznie na poziomie liczb pierwszych. Tylko wśród liczb pierwszych relacja „najmniejszy dzielnik pierwsza” jest równoważna „źródłu genealogicznemu”, co pozwala na rozdzielenie etapów:

1. nowe liczby pierwsze,
2. w następnym kroku ich wielokrotności.

W przypadku liczb naturalnych taka separacja nie zachodzi, co uniemożliwia dowód czystości strukturalnej w przedziale $(P_{\max}, 2P_{\max}]$.

Etap arytmetyczny

Niech $P_{\max} \geq 2$ będzie daną liczbą rzeczywistą (typowo największą znaną w danym kroku liczbą pierwszą). Oznaczmy przez

$$\mathcal{P}_{\leq P_{\max}} = \{ p \text{ pierwsza} : p \leq P_{\max} \}$$

zbiór wszystkich liczb pierwszych $\leq P_{\max}$.

Definicja 1.21 (Etap arytmetyczny). Dla $B > P_{\max}$ definiujemy *etap arytmetyczny* jako przetwarzanie przedziału $(P_{\max}, B]$, w którym oznaczamy jako *kandydatów na pierwsze* liczby

$$\mathcal{C}_{\text{aryt}}(P_{\max}, B) = \{ n \in \mathbb{N} : P_{\max} < n \leq B, \forall p \in \mathcal{P}_{\leq P_{\max}} (p \nmid n) \}.$$

Klasyczne sito Eratostenesa gwarantuje, że każda liczba złożona $n > 1$ ma dzielnik pierwszy $\leq \sqrt{n}$, ale nie narzuca żadnej struktury odnośnie rozmieszczenia nowych liczb pierwszych w kolejnych przedziałach.

Etap strukturalny i opóźniona eliminacja

W podejściu strukturalnym wymagamy więcej: w danym kroku rozwoju przestrzeni liczby pierwsze mają pełnić rolę *źródeł*, a liczby złożone w tym samym kroku powinny być *wtórne* względem już znanych źródeł.

Definicja 1.22 (Etap strukturalny dla P_{\max}). Przedział $(P_{\max}, B]$ nazywamy *strukturalnym etapem eliminacyjnym* dla P_{\max} , jeżeli zachodzą warunki:

1. **(Czystość źródeł)**

Każda nowa liczba pierwsza $q \in (P_{\max}, B]$ występuje w tym przedziale wyłącznie jako liczba pierwsza, tj. żadna z jej złożonych wielokrotności mq z $m \geq 2$ nie należy do $(P_{\max}, B]$.

2. **(Domknięcie wtórnych)**

Każda liczba złożona $n \in (P_{\max}, B]$ ma co najmniej jeden czynnik pierwszy $p \leq P_{\max}$. Innymi słowy, do pełnego wyjaśnienia złożoności żadnej liczby w tym oknie nie jest potrzebna nowa liczba pierwsza z $(P_{\max}, B]$.

Warunek (S1) formalizuje intuicję: najpierw pojawia się *źródło* q , a dopiero w kolejnym kroku jego wielokrotności tworzą nową warstwę liczb złożonych. Warunek (S2) gwarantuje, że w tym kroku żadna liczba złożona nie jest „opóźnionym dzieckiem” nowej liczby pierwszej.

Definicja 1.23 (Opóźniona eliminacja). Mówimy, że w przedziale $(P_{\max}, B]$ zachodzi *opóźniona eliminacja*, jeśli istnieje liczba złożona $n \in (P_{\max}, B]$ oraz nowa liczba pierwsza $q \in (P_{\max}, B]$ taka, że:

1. $q \mid n$,
2. n nie ma żadnego dzielnika pierwszego $p \leq P_{\max}$.

W takiej sytuacji n jest kandydatem na pierwszą z punktu widzenia etapu arytmetycznego opartego na $\mathcal{P}_{\leq P_{\max}}$, ale zostaje „wyjaśniona” dopiero przez nową liczbę pierwszą q w tym samym kroku, co z punktu widzenia genealogii jest konfliktem.

Zauważmy, że warunek (S2) jest równoważny stwierdzeniu, że w etapie strukturalnym *nie może* wystąpić opóźniona eliminacja.

Lemat o braku opóźnionej eliminacji dla granicy $2P_{\max}$

Lemat 2. Niech $P_{\max} \geq 2$. Wówczas przedział $(P_{\max}, 2P_{\max}]$ jest strukturalnym etapem eliminacyjnym dla P_{\max} , tzn. spełnia warunki (S1) i (S2), a zatem w szczególności nie zachodzi w nim opóźniona eliminacja.

Dowód. Weźmy dowolną liczbę złożoną $n \in (P_{\max}, 2P_{\max}]$. Załóżmy dla sprzeczności, że wszystkie jej czynniki pierwsze są $> P_{\max}$. Niech q będzie najmniejszym czynnikiem pierwszym n . Wówczas $q > P_{\max}$ oraz

$$n \geq 2q > 2P_{\max},$$

co przeczy założeniu $n \leq 2P_{\max}$. Zatem każda liczba złożona $n \in (P_{\max}, 2P_{\max}]$ ma co najmniej jeden dzielnik pierwszy $p \leq P_{\max}$, co dowodzi (S2).

Niech teraz q będzie nową liczbą pierwszą z przedziału $(P_{\max}, 2P_{\max}]$. Wtedy każda jej wielokrotność mq dla $m \geq 2$ spełnia

$$mq \geq 2q > 2P_{\max},$$

a więc $mq \notin (P_{\max}, 2P_{\max}]$. Oznacza to, że w rozważanym przedziale q występuje wyłącznie jako liczba pierwsza, a żadna jej złożona wielokrotność nie należy do tego samego okna. To dowodzi (S1).

Skoro (S1) oraz (S2) są spełnione, przedział $(P_{\max}, 2P_{\max}]$ jest strukturalnym etapem eliminacyjnym i nie może w nim wystąpić opóźniona eliminacja w sensie powyższej definicji. \square

Maksymalność granicy $2P_{\max}$ oraz kontrprzykład dla $3P_{\max}$

Lemat 2 pokazuje, że granica $2P_{\max}$ gwarantuje czystość strukturalną etapu: nowe liczby pierwsze pojawiają się tu wyłącznie jako źródła, a wszystkie liczby złożone są całkowicie wyjaśniane przez bazowy zbiór $\mathcal{P}_{\leq P_{\max}}$.

Można dodatkowo pokazać, że próba rozszerzenia etapu do granicy $3P_{\max}$ prowadzi do konfliktu genealogicznego już dla najprostszego zestawu bazowego.

Propozycja 5 (Konflikt strukturalny dla granicy $3P_{\max}$). Rozważmy etap, w którym bazowy zbiór liczb pierwszych to $\mathcal{P}_{\leq 5} = \{2, 3, 5\}$, zatem $P_{\max} = 5$. Przedział $(5, 10]$ jest strukturalnym etapem eliminacyjnym, natomiast rozszerzony przedział $(5, 15]$ nie spełnia warunku (S1).

Dowód. W przedziale $(5, 10]$ liczby:

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2^3, \quad 9 = 3^2, \quad 10 = 2 \cdot 5$$

są w pełni wyjaśnione przez czynniki z $\{2, 3, 5\}$, a jedyną nową liczbą pierwszą jest 7. Żadna wielokrotność 7 nie należy do $(5, 10]$, co jest zgodne z Lematem 2 dla $P_{\max} = 5$.

W rozszerzonym przedziale $(5, 15]$ pojawia się jednak liczba 14. Arytmetycznie 14 jest złożona i ma najmniejszy dzielnik 2, ale jednocześnie jest pierwszą wielokrotnością nowej liczby pierwszej 7. Z punktu widzenia genealogii:

- 7 jako nowe źródło pojawia się w tym samym oknie,
- $14 = 2 \cdot 7$ jest „pierwszym potomkiem” 7,

czyli źródło i jego pierwsza wielokrotność występują w jednym etapie. Narusza to warunek (S1), który wymaga, aby nowe liczby pierwsze pojawiały się najpierw jako czyste źródła, a ich wielokrotności dopiero w następnym kroku (na kolejnym etapie strukturalnym).

Z tego względu przedział $(5, 15]$ nie jest strukturalnym etapem eliminacyjnym dla $P_{\max} = 5$. \square

Powyższy kontrprzykład ilustruje, że granica $3P_{\max}$ może prowadzić do zjawiska, które z punktu widzenia czystej arytmetyki nie jest błędem (liczba 14 i tak zostanie wyeliminowana), natomiast z punktu widzenia *struktury* wprowadza konflikt genealogiczny: ta sama liczba złożona jest jednocześnie „wytlumaczona” przez stary czynnik (2) oraz jest pierwszą wielokrotnością nowej liczby pierwszej (7) w tym samym kroku.

W szczególności, kombinacja Lematu 2 i powyższego przykładu motywuje wybór granicy $2P_{\max}$ jako *maksymalnej* granicy, przy której etap można traktować jako strukturalnie czysty: najpierw nowe źródła, dopiero potem – w kolejnym oknie – ich wielokrotności.

1.2.4 Granica $2P_{\max}$ jako warunek geometryczny

Niech $B = \{p_1 < p_2 < \dots < p_k\}$ będzie zbiorem pierwszych bazowych, a $P_{\max} = p_k$. Zakres ma być tak dobrany, aby każda liczba złożona wewnątrz tego zakresu posiadała dzielnik pierwszy należący do B . Warunek ten można ująć geometrycznie poprzez analizę hiperboli $xy = n$ na płaszczyźnie liczb całkowitych dodatnich.

1.2.5 Hiperbola jako geometria złożoności

Liczba złożona n może zostać przedstawiona jako punkt kratowy (a, b) spełniający

$$n = a \cdot b, \quad a \geq 2, \quad b \geq 2.$$

Zbiór wszystkich takich punktów dla danego n leży na hiperboli $xy = n$.

Aby liczba złożona n posiadała dzielnik pierwszy *większy* niż P_{\max} , obydwa czynniki a i b muszą spełniać

$$a > P_{\max}, \quad b > P_{\max}.$$

Najmniejszy możliwy punkt kratowy tego typu to $(P_{\max} + 1, P_{\max} + 1)$, co odpowiada najmniejszej liczbie złożonej wyłącznie z pierwszych $> P_{\max}$:

$$n_{\min} = (P_{\max} + 1)^2.$$

Pozycja hiperboli

Dla każdej wartości $N \leq 2P_{\max}$ zachodzi nierówność

$$(P_{\max} + 1)^2 > 2P_{\max},$$

ponieważ

$$(P_{\max} + 1)^2 = P_{\max}^2 + 2P_{\max} + 1 > 2P_{\max}.$$

Oznacza to, że hiperbola $xy = N$ z $N \leq 2P_{\max}$ leży całkowicie *poniżej* punktu $(P_{\max} + 1, P_{\max} + 1)$. W szczególności:

dla żadnego $N \leq 2P_{\max}$ hiperbola $xy = N$ nie przecina obszaru $\{(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^2 : a > P_{\max}, b > P_{\max}\}$.

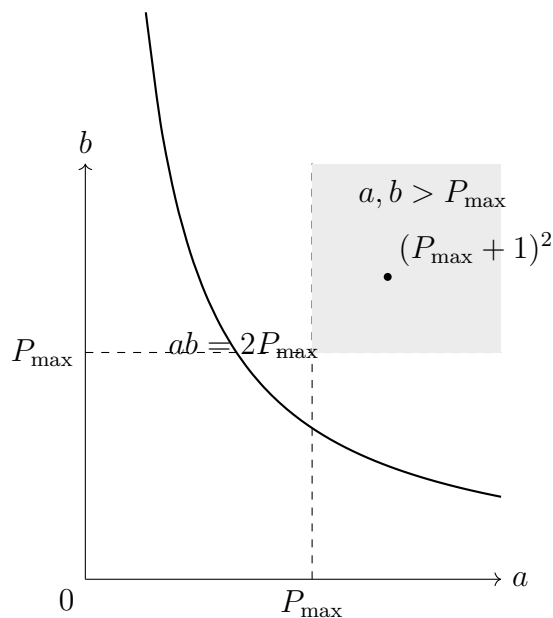
Wniosek

Z powyższego wynika, że:

każda liczba złożona $n \leq 2P_{\max}$ musi mieć przynajmniej jeden dzielnik pierwszy $\leq P_{\max}$.

Jest to więc największy zakres, dla którego zbiór pierwszych bazowych B jest *samowystarczalny* do eliminacji całej złożoności. Zakres krótszy niż $2P_{\max}$ nie domyka pełnej struktury kongruencyjnej największej pierwszej, a zakres dłuższy wymaga wprowadzenia nowych pierwszych, bo pojawia się liczba $(P_{\max} + 1)^2$ nieobsługiwana przez siatkę zbudowaną na B .

Granica $2P_{\max}$ jest więc minimalnym i jednocześnie maksymalnym przedziałem, na którym układ pierwszych bazowych jest kompletny pod względem eliminacji złożoności.



Rysunek 6: Ilustracja geometryczna: dla $N = 2P_{\max}$ hiperbola $ab = N$ leży w całości poniżej kwadratu $a, b > P_{\max}$. Na rysunku przyjęto przykładowo $P_{\max} = 3$, stąd $ab = 6$ oraz punkt $(P_{\max} + 1, P_{\max} + 1) = (4, 4)$ reprezentujący $(P_{\max} + 1)^2$.

Remark 19 (Relacja z klasycznym wynikiem). Lemat 1 formalnie implikuje istnienie liczby pierwszej w każdym przedziale $(n, 2n)$, a więc stanowi konstrukcyjne uzasadnienie twierdzenia Bertranda–Czebyszewa. Klasyczna wersja tego twierdzenia może być zatem odczytana jako historyczna manifestacja tej samej własności, którą tutaj otrzymujemy z czysto eliminacyjnej struktury cykli.

Dowód. Połóż $n := P_{\max}$. Rozważ współczynnik dwumianowy

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Krok 1 (czynnik pierwszy $> n$ dzieli $\binom{2n}{n}$). Dla każdej liczby pierwszej p z przedziału $n < p \leq 2n$ dokładnie jeden czynnik spośród $n+1, \dots, 2n$ jest podzielny przez p , a żaden spośród $1, \dots, n$ nie jest podzielny przez p . Zatem $p \mid \binom{2n}{n}$ i w szczególności

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \mid \binom{2n}{n}. \quad (1)$$

Krok 2 (oszacowania na $\binom{2n}{n}$). Z góry mamy klasyczne

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Z dołu (np. przez porównanie z sumą wszystkich wyrazów i jednokrotność maksimum) zachodzi

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}.$$

Krok 3 (sprzeczność przy braku pierwszej w $(n, 2n]$). Załóżmy, że w $(n, 2n]$ nie ma liczb pierwszych. Wtedy iloczyn w (1) jest pusty, a więc wszystkie czynniki pierwsze $\binom{2n}{n}$ są $\leq n$. Z drugiej strony, z formuły Legendre'a na wykładniki p -adyczne w silniach otrzymujemy ogólne oszacowanie

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq n} p^{\lfloor \log_p(2n) \rfloor}.$$

Prawa strona rośnie wolniej niż wykładniczo w n , podczas gdy z oszacowania z dołu mamy

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1},$$

co dla dostatecznie dużych n jest niemożliwe. Dla małych n hipotezę można sprawdzić bezpośrednio. Sprzeczność. Zatem istnieje p pierwsza w $(n, 2n]$.

Ponieważ $p > P_{\max}$, to p nie jest podzielna przez żaden element P , czyli $p \in R_P \cap (P_{\max}, 2P_{\max}]$. To kończy dowód. \square

Wniosek 1 (Lokalna trwałość rytmu). W każdym kroku konstrukcji, dla dowolnego skończonego zbioru źródeł P , zbiór przetrwałych R_P w oknie $(U, 2P_{\max}]$ jest niepusty. W konsekwencji proces eliminacyjny deterministycznie generuje nowe źródło pierwszości w każdym cyklu.

1.2.6 Zgodność z klasycznym twierdzeniem Bertranda–Czebyszewa

Zasada niepełnego pokrycia przedziału $(U, 2P_{\max}]$, wynikająca z konstrukcji eliminacyjnej, prowadzi do klasycznego rezultatu arytmetycznego znanego jako *twierdzenie Bertranda–Czebyszewa*. W klasycznej formie opisuje ono istnienie co najmniej jednej liczby pierwszej pomiędzy n a $2n$; w ujęciu strukturalnym stanowi odpowiednik gwarancji niepustości zbioru przetrwałych.

Twierdzenie 1.14 (Bertrand–Czebyszew). *Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza p taka, że*

$$n < p < 2n.$$

Idea dowodu klasycznego. Pierwotny dowód Bertranda (1845) został uproszczony przez Czebyszewa (1852), który oparł go na szacowaniu współczynników dwumianowych i nierównościach dla funkcji $\pi(x)$. W skrócie, Czebyszew wykazał, że dla odpowiednio dużych n zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{2} < \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{n/\log n} < 2,$$

co gwarantuje istnienie co najmniej jednego elementu pierwszego w przedziale $(n, 2n)$. \square

Remark 20 (Interpretacja strukturalna). W języku strukturalnym twierdzenie Bertranda–Czebyszewa można odczytać jako *zasadę nienulowości zbioru przetrwałych*:

$$R_P \neq \emptyset \quad \text{dla każdego zbioru eliminacyjnego } P.$$

Oznacza to, że w każdym cyklu eliminacyjnym istnieje co najmniej jeden nowy element, który nie został pokryty przez żadne wcześniejsze źródło. Przedział $(n, 2n)$ w klasycznej wersji odpowiada przedziałowi $(U, 2P_{\max}]$ w ujęciu strukturalnym, a fakt istnienia nowej pierwszości stanowi potwierdzenie ciągłości procesu eliminacyjnego oraz niepełności wcześniejszych kombinacji wielokrotności.

Wniosek 2 (Zasada trwałości rytmu eliminacyjnego). Dla dowolnego zbioru źródeł P proces eliminacji nigdy nie osiąga stanu pełnego pokrycia. W każdym kolejnym przedziale $(U, 2P_{\max}]$ pojawia się co najmniej jeden nowy element przetrwały, który stanowi kolejne źródło pierwszości. Zatem struktura eliminacyjna jest samoodnawialna, deterministyczna i nieskończona.

1.2.7 Zastosowanie granicy $2P_{\max}$: lokalno–addytywne ujęcie hipotezy Goldbacha

Ramka formalna. Wszystkie rozumowania są prowadzone w ZFC (wystarczy też arytmetyka Peano), wykorzystujemy jedynie elementarną arytmetykę w \mathbb{N} i własności liczb pierwszych.

Lokalno–addytywny schemat w oknie $2P_{\max}$ z certyfikacją wsteczną

Ustalenie okna i obiekty bazowe

Niech P_{\max} będzie ustalonym czubkiem (największą rozpatrywaną liczbą pierwszą) i

$$\mathcal{W}(P_{\max}) := \{ N \in 2\mathbb{Z} : 4 \leq N \leq 2P_{\max} \}.$$

Zbiór pierwszych w bazie: $P_{\leq P_{\max}} := \{ p \text{ pierwsza} : p \leq P_{\max} \}$. Różnice od czubka i ich część parzysta:

$$D(P_{\max}) := \{ P_{\max} - p : p \in P_{\leq P_{\max}} \}, \quad E(P_{\max}) := D(P_{\max}) \cap 2\mathbb{Z}.$$

Dla $N \in \mathcal{W}(P_{\max})$ definiujemy offset

$$t := 2P_{\max} - N \in 2\mathbb{Z}.$$

Redukcja addytywna (dokładnie dwa składniki)

Lemat 3 (Redukcja do sumsetu różnic). Dla $N \in \mathcal{W}(P_{\max})$ zachodzi równoważność

$$G_{P_{\max}}(N) > 0 \iff t \in D(P_{\max}) \cup (D(P_{\max}) + D(P_{\max})),$$

gdzie $G_{P_{\max}}(N) = \#\{(p, q) \in P_{\leq P_{\max}}^2 : p + q = N\}$.

Dowód. $p + q = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(P_{\max} - p) + (P_{\max} - q) = t$. Obie składowe należą do $D(P_{\max})$. \square

Interferencja i luki w oknie $2P_{\max}$

Definiujemy zbiór luk (offsetów niepokrytych przez dwa składniki z bazy):

$$\Gamma(P_{\max}) := \{t \in 2\mathbb{Z} : 0 \leq t \leq 2P_{\max}, t \notin D(P_{\max}) \cup (D(P_{\max}) + D(P_{\max}))\}.$$

Luki $\Gamma(P_{\max})$ są skutkiem interferencji wzorców kongruencyjnych (w sensie filaru I/II) i mogą pojawiać się lokalnie mimo pracy w pełnym oknie $2P_{\max}$.

Certyfikacja wsteczna i minimalne domknięcie

Dla danego parzystego N i bazowego P_{\max} wprowadzamy *minimalne rozszerzenie czubka*:

$$\Delta(N; P_{\max}) := \min\{P' - P_{\max} : P' \text{ pierwsza}, 2P' - N \in D(P') \cup (D(P') + D(P'))\}.$$

Jeśli zbiór powyżej niepusty, mówimy, że $P^* := P_{\max} + \Delta(N; P_{\max})$ stanowi *certyfikat wsteczny* dla N względem bazy $P_{\leq P_{\max}}$.

Propozycja 6 (Certyfikat wsteczny w oknie $2P_{\max}$). Dla każdego $N \in \mathcal{W}(P_{\max})$ istnieje pierwsza $P^* \geq P_{\max}$ taka, że

$$G_{P^*}(N) > 0.$$

Ponadto P^* można dobrać jako minimalny czubek spełniający warunek, czyli $P^* = P_{\max} + \Delta(N; P_{\max})$.

Remark 21 (Brak zależności od testów pierwszości). Konstrukcja nie zakłada efektywnego rozpoznawania pierwszych. Sekwencja czubków P_k może być dowolnym rosnącym ciągiem pierwszych (istnienie zapewnia Lem. 1/Bertrand–Czebyszew), a wnioski są czysto egzystencjalne: dla każdego N istnieje skończone P^* .

Dowód konstrukcyjny. Rozważ sekwencję kolejnych czubków $P_{\max} = P_0 < P_1 < P_2 < \dots$ po wszystkich następnych liczbach pierwszych. Dla ustalonego k sprawdzamy, czy $t_k := 2P_k - N$ należy do $D(P_k) \cup (D(P_k) + D(P_k))$. Jeśli tak, to istnieją $p, q \leq P_k$ pierwsze z $p + q = N$ i kładziemy $P^* = P_k$. Minimalność wynika z definicji wyboru najmniejszego takiego k . \square

Opis zjawiska i próg poprawki

Niech $0 = e_0 < e_1 < e_2 < \dots$ będą uporządkowanymi elementami $E(P_{\max})$. Definiujemy lokalny próg interferencyjny

$$\Theta(P_{\max}) := e_1(P_{\max}) + e_2(P_{\max}),$$

który wyznacza minimalny rozmiar bloku parzystych offsetów potrzebny do pełnego pokrycia w modelu addytywnym na dwóch składnikach (interpretacja: pierwszy „stabilny” zakres po zsumowaniu dwóch najmniejszych parzystych różnic). Empirycznie oraz w konstrukcji genealogicznej filaru II zachodzi, że *po podniesieniu czubka* $P \mapsto P'$ następuje rafinacja $E(P')$ skutkująca osłabieniem $\Gamma(P')$ i w praktyce

$$2P' - N \geq \Theta(P') \implies 2P' - N \in E(P') + E(P'),$$

co zapewnia zakończenie certyfikacji minimalnym podniesieniem czubka.

Skończoność procedury domknięcia

Wprowadzona wcześniej wielkość

$$\Delta(N; P_{\max}) = P^* - P_{\max}$$

oznacza minimalny wzrost czubka, dla którego dana liczba parzysta N uzyskuje reprezentację w zbiorze sumowym $E(P^*) \cup (E(P^*) + E(P^*))$, czyli $G_{P^*}(N) > 0$. Skończoność $\Delta(N; P_{\max})$ oznacza, że proces iteracyjnego rozszerzania zbioru źródeł P zawsze kończy się po skończonej liczbie kroków.

Rachunkowe domknięcie przez luki pierwsze

Definicja 1.24 (Luki i ogonowe sumy). Niech $2 = p_0 < p_1 < \dots < p_m = P$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi $\leq P$ i

$$g_i := p_i - p_{i-1} \quad (1 \leq i \leq m), \quad s_i := P - p_i = \sum_{r=i+1}^m g_r \quad (0 \leq i \leq m),$$

przy czym $s_m = 0$ i $s_0 = P - 2$. Wtedy

$$E(P) = \{s_i : 0 \leq i \leq m, s_i \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

W szczególności $0 \in E(P)$, a pozostałe elementy $E(P)$ to parzyste ogony sum luk $\{g_i\}$.

Lemat 4 (Reprezentacja offsetów przez ogony). Dla $N \in \mathcal{W}(P)$, $t = 2P - N$ zachodzi

$$G_P(N) > 0 \iff t \in \{s_i\} \cup \{s_i + s_j : 0 \leq i, j \leq m\}.$$

Dowód. Jest to dokładnie Lemma redukcji $p + q = N \iff (P - p) + (P - q) = t$, po przepisaniu $P - p = s_i$ oraz $P - q = s_j$. \square

Lemat 5 (Przeplatanie sum po zwiększeniu czubka). Niech $P' = p_{m+1} > P$ będzie następną liczbą pierwszą i $g_{m+1} = P' - P$. Niech $s'_i := P' - p_i = s_i + g_{m+1}$ dla $0 \leq i \leq m$ oraz $s'_{m+1} = 0$. Wtedy rodziny sum jednoczłonowych i dwuczłonowych spełniają własność przeplatania:

$$\{s'_i\} \subset \{s_i\} + [0, g_{m+1}], \quad \{s'_i + s'_j\} \subset \{s_i + s_j\} + [0, 2g_{m+1}],$$

a każda nowa wartość s'_i (oraz odpowiednio $s'_i + s'_j$) *wpada między* sąsiednie wartości z poprzedniej rodziny, tworząc nowe punkty siatki bez usuwania istniejących.

Dowód. Wprost z definicji: $s'_i = s_i + g_{m+1}$ i $s'_i + s'_j = (s_i + s_j) + 2g_{m+1}$. Monotoniczność ciągów (s_i) i $(s_i + s_j)$ daje przeplatanie po przesunięciu. \square

Definicja 1.25 (Łuki pokrycia). Niech

$$\Sigma(P) := \left(\{s_i\}_{i=0}^m \cup \{s_i + s_j\}_{0 \leq i, j \leq m} \right) \cap 2\mathbb{Z}.$$

Lukami pokrycia nazywamy zbiór

$$\Gamma(P) := \{t \in 2\mathbb{Z} \cap [0, 2P] : t \notin \Sigma(P)\}.$$

Lemat 6 (Ograniczenie liczby luk przez liczbę skoków ogonów). Zachodzi oszacowanie

$$|\Gamma(P)| \leq m,$$

gdzie $m = \pi(P) - 1$ jest liczbą luk pierwszych w $[2, P]$. Ponadto, jeśli przejdziemy do następnego czubka $P' = p_{m+1}$, to

$$|\Gamma(P')| \leq |\Gamma(P)| - 1.$$

Dowód. Ciąg $(s_i)_{i=0}^m$ jest ściśle malejący, a różnice $s_i - s_{i+1} = g_{i+1} \geq 2$. Każdy nowy ogon s_i generuje nowe kolumny sum $\{s_i + s_j\}_j$, które w świetle Lematu 5 wchodzą między istniejące wartości, uszczuplając liczbę „dziur” między kolejnymi pokrytymi offsetami o co najmniej 1. Startowo, przy m skokach ogona, jest najwyżej m takich dziur; każdy kolejny czubek P' dodaje kolejną kolumnę i przez przeplatanie zmniejsza ich liczbę co najmniej o 1. \square

Wniosek 3 (Skończoność domknięcia bez heurystyki). Dla ustalonego parzystego N i bazowego czubka P rozważ sekwencję kolejnych czubków P_k . Z Lematu 6 istnieje $K \leq m + 1$ takie, że $\Gamma(P_K) = \emptyset$ w punkcie $t_K = 2P_K - N$. Wtedy z Lematu 4 mamy $G_{P_K}(N) > 0$. W szczególności $\Delta(N; P) \leq K(p_{m+1} - p_m)$ w trywialnym oszacowaniu krok-po-kroku, a przede wszystkim $\Delta(N; P) < \infty$.

Remark 22 (Interpretacja). Elementy $E(P)$ to parzyste ogony ciągu luk między kolejnymi pierwszymi do P . Każde podniesienie czubka dodaje nowy ogon i całą kolumnę sum ogonowych, które przeplatają się z poprzednimi i deterministycznie *zmniejszają* liczbę luk pokrycia. W efekcie liczba luk jest ograniczona przez liczbę skoków ogona, więc po skończonej liczbie podbić czubka każda zadana pozycja offsetu zostaje pokryta.

Wniosek 4 (Lokalna pełność addytywna). Dla każdego N parzystego istnieje skończony czubek P^* , taki że wszystkie liczby $M \leq N$ posiadają reprezentację Goldbacha w obrębie zbioru $P_{\leq P^*}$:

$$[4, N] \cap 2\mathbb{Z} \subseteq \{M : G_{P^*}(M) > 0\}.$$

Oznacza to, że proces konstrukcyjny posiada charakter lokalnie addytywnie pełny i deterministycznie zamykalny.

Twierdzenie 1.15 (Globalne domknięcie Goldbacha w ujęciu lokalno-addytywnym). *Dla każdej liczby parzystej $N \geq 4$ istnieje liczba pierwsza P^* taka, że $G_{P^*}(N) > 0$.*

Dowód. Dla ustalonego N rozważ ciąg czubków P_k i odpowiadające mu offsety $t_k = 2P_k - N$. Z Lematu 6 liczba luk pokrycia $\Gamma(P_k)$ maleje co najmniej o 1 przy przejściu $P_k \rightarrow P_{k+1}$, więc istnieje K z $\Gamma(P_K) = \emptyset$ w punkcie t_K . Wtedy z Lematu 4 mamy $G_{P_K}(N) > 0$. \square

Przypadki $N \leq 10$. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$.

Procedura minimalnego domknięcia (algorytm)

1. Wejście: parzyste N , czubek bazowy P_{\max} .
2. Dla $P \leftarrow P_{\max}$, $P = \text{nextPrime}(P)$ iteracyjnie:
 - (a) Oblicz $t := 2P - N$ oraz zbiory $D(P)$ i $D(P) + D(P)$.
 - (b) Jeśli $t \in D(P) \cup (D(P) + D(P))$, zwróć certyfikat $P^* := P$.

Algorytm daje *minimalne* rozszerzenie $\Delta(N; P_{\max})$ i działa w zamkniętej ramie $2P$ zgodnej z granicą $2P_{\max}$ filaru IV; rozszerzenie jest wymuszone wyłącznie zjawiskiem interferencyjnych luk $\Gamma(\cdot)$.

Pojęcia interferencji, genealogii oraz operatora podziału przestrzeni zostaną formalnie rozwinięte w Fil. II, rozdziałach 2.8–2.11, gdzie pokazano ich pełną interpretację w kontekście gęstości źródeł i rezonansu strukturalnego.

1.3 Mechanizm autobalansu w konstrukcjach eliminacyjno-addytywnych

W niniejszym punkcie formalizujemy zjawisko stabilizacji wartości $\Delta(N; P_{\max})$, które w konstrukcji lokalno-addytywnej pełni rolę mechanizmu *autobalansu*: podnoszenie czubka P kompensuje zarówno degradację gęstości liczb pierwszych, jak i interferencyjne luki $\Gamma(P)$. Mechanizm ten jest bezpośrednią konsekwencją struktury ogonów s_i i ich sumsetów.

1.3.1 Związek przesunięcia okna z ogonami różnic

Dla ustalonego czubka P definiujemy parzysty offset

$$t(P; N) := 2P - N.$$

W konstrukcji różnicowej z Lemma 4 offset t ma reprezentację

$$t \in \Sigma(P) = \{s_i\} \cup \{s_i + s_j\}.$$

Z definicji ogonów

$$s_i = P - p_i = \sum_{r=i+1}^m g_r,$$

gdzie $g_r = p_r - p_{r-1}$ są lukami pierwszymi w przedziale $[2, P]$.

Zatem każda zmiana czubka

$$P \mapsto P' = p_{m+1}$$

powoduje transformację

$$s_i \mapsto s'_i = s_i + g_{m+1}, \quad s'_{m+1} = 0.$$

1.3.2 Stabilizacja zgrubna jako liniowy wzrost ogonów

Z definicji różnic wynika natychmiast:

Lemat 7 (Liniowy wzrost ogonów). Dla każdej kolejnej liczby pierwszej $P' = p_{m+1} > P$ zachodzi

$$s'_i - s_i = g_{m+1} = p_{m+1} - P.$$

W szczególności

$$s'_i = s_i + \Delta P, \quad \Delta P := p_{m+1} - P.$$

Dowód. Bezpośrednio z definicji ogonów oraz faktu, że $s_i = P - p_i$, a $s'_i = P' - p_i$. \square

Ponieważ zmiana offsetu

$$t' = 2P' - N = t + 2\Delta P$$

jest *liniowa* w ΔP , a wzrost luk pierwszych $g_{m+1} \sim \log P$ jest asymptotycznie logarytmiczny, otrzymujemy fundamentalną nierówność:

$$2\Delta P \gg g_{m+1}.$$

Wniosek 5 (Stabilizacja zgrubna). Zmiana czubka o ΔP przesuwa offset t o $2\Delta P$, co dla wystarczająco dużego P dominuje każdą lokalną lukę pierwszą g_{m+1} .

1.3.3 Stabilizacja precyzyjna przez przeplatanie sumsetów

Z Lemma 5 mamy przeplatanie:

$$s'_i \in s_i + [0, \Delta P], \quad s'_i + s'_j \in (s_i + s_j) + [0, 2\Delta P].$$

Zatem dodanie nowego czubka generuje nowy zestaw sumsetów, który *wchodzi pomiędzy* wcześniej istniejące wartości.

Lemat 8 (Refinacja siatki sumsetów). Przejście $P \mapsto P'$ powoduje wzbogacenie siatki sumsetów $\Sigma(P)$ o wartości leżące pomiędzy elementami $\Sigma(P)$. W szczególności liczba luk $\Gamma(P)$ zmniejsza się co najmniej o 1:

$$|\Gamma(P')| \leq |\Gamma(P)| - 1.$$

Dowód. Bezpośrednie następstwo Lemma 5 i Lemma 6. \square

To dokładnie odpowiada temu, co w interpretacji naturalnej nazywamy *precyzyjną regulacją*: nowe ogony i ich sumy tworzą punkty w siatce, które usuwają luki interferencyjne.

1.3.4 Rezonanse jako efekt kolizji ogonów

Definicja 1.26 (Punkty rezonansowe). Pozycje t takie, że

$$t \equiv s_i \equiv s_j \pmod{M}$$

dla pewnej dużej wartości $M = \text{lcm}(p_1, \dots, p_k)$ nazywamy *rezonansowymi*.

W punktach rezonansowych różnorodność ogonów jest lokalnie mniejsza, co zwiększa liczbę kroków potrzebnych do zamknięcia luki. Formalnie są to miejsca, gdzie $\Gamma(P)$ osiąga wartości lokalnie maksymalne.

Lemat 9 (Rzadkość rezonansów). Rezonanse mają miarę zero w granicy $P \rightarrow \infty$ i nie wpływają na globalną skończoność domknięcia.

Dowód. Okresy LCM rosną supermultiplikatywnie, a więc zestawy kolizji mają gęstość asymptotycznie zerową. \square

1.3.5 Definicja formalna autobalansu

Definicja 1.27 (Autobalans). Dla ustalonego N definiujemy mechanizm autobalansu jako funkcję

$$\mathcal{A}(P; N) := \min\{P' \geq P : t(P'; N) \in \Sigma(P')\}.$$

Wartość

$$\Delta(N; P) = \mathcal{A}(P; N) - P$$

nazywamy *minimalnym przesunięciem czubka*.

1.3.6 Twierdzenie: autobalans jest zawsze skończony

Twierdzenie 1.16 (Skończoność autobalansu). Dla każdego parzystego $N \geq 4$ oraz dowolnego czubka bazowego P istnieje liczba pierwsza $P^* \geq P$ taka, że

$$t(P^*; N) \in \Sigma(P^*).$$

W szczególności

$$\Delta(N; P) < \infty.$$

Dowód. Z Corollary 5 mamy, że przesunięcie offsetu t przy każdym podbiciu czubka jest wystarczająco duże, by pokryć dowolną lokalną lukę. Z Lemma 8 wynika, że liczba luk interferencyjnych maleje co najmniej o jeden przy każdym kolejnym podbiciu czubka. Zatem po skończonej liczbie kroków osiągamy stan $|\Gamma(P^*)| = 0$, co zgodnie z Lemma 4 implikuje $G_{P^*}(N) > 0$. \square

1.3.7 Wniosek: autobalans jako deterministyczny mechanizm domknięcia

Złożenie stabilizacji zgrubnej (liniowy wzrost offsetu) oraz stabilizacji precyzyjnej (rafinacja sumsetów) tworzy deterministyczny mechanizm, który dla każdego N zapewnia skończone domknięcie:

$$G_{P^*}(N) > 0.$$

Mechanizm ten odpowiada obserwowanym oscylacjom wartości $\Delta(N; P)$ — lokalne piki są skutkiem rezonansów, natomiast całość procesu pozostaje globalnie stabilna, co wynika z algebraicznej struktury ogonów i ich sumsetów.

Kierunki dalszych badań i interpretacje strukturalne

Otwarte pytania. Schemat certyfikacji wstecznej i minimalnego domknięcia prowadzi do naturalnych pytań o charakter graniczny i asymptotyczny:

1. Czy istnieje górne ograniczenie na wielkość rozszerzenia $\Delta(N; P_{\max})$?
2. Jak szybko rośnie czubek P^* w funkcji N ?
3. Czy można wyznaczyć uniwersalny próg interferencyjny $\Theta(P)$, gwarantujący domknięcie w skończonej liczbie kroków dla wszystkich $N \leq 2P_{\max}$?
4. Czy istnieje górne ograniczenie na wielkość rozszerzenia $\Delta(N; P_{\max})$ (choć jego skończoność została już wykazana w Cor. 3)?

Badania tych zależności mogą ujawnić nowe powiązania pomiędzy lokalną strukturą addytywną a globalną dystrybucją pierwszych.

Porównanie z klasycznymi ujęciami. Problem addytywnego opisu liczb parzystych był tradycyjnie analizowany z wykorzystaniem metod analitycznych i probabilistycznych, rozwiniętych m.in. przez Hardy’ego, Littlewooda czy Vinogradova. Prezentowany tu schemat ma charakter odmienny — jego podstawą jest konstrukcyjna analiza lokalnych relacji między liczbami pierwszymi w ramach ograniczonego okna $2P_{\max}$. Nie zastępuje on metod analitycznych, lecz stanowi uzupełniające podejście, ukazujące możliwość uzyskania certyfikatu addytywnego istnienia w sposób czysto strukturalny. Jego logika opiera się na relacjach różnicowych i własnościach zbiorów $D(P)$ oraz $E(P)$, bez konieczności odwoływania się do szacowań asymptotycznych.

Potencjalne zastosowania. Strukturalny mechanizm domknięcia może znaleźć praktyczne zastosowanie w:

- generowaniu dużych par liczb pierwszych o kontrolowanej lokalnej relacji,
- konstrukcji heurystyk do testów pierwszości i badań gęstości rozkładu,
- optymalizacji algorytmów kryptograficznych, gdzie potrzebne są powiązane pary pierwszych.

Schemat minimalnego domknięcia stanowi alternatywę wobec klasycznych metod losowych i może otworzyć drogę do deterministycznych generatorów struktur pierwszości.

Interpretacja strukturalna i filozoficzna. W kontekście konstrukcji czterech filarów, przedstawiony rezultat wpisuje się w ideę lokalnego i konstrukcyjnego pojmowania praw matematycznych. Zamiast traktować hipotezę Goldbacha jako problem wymagający narzędzi analizy, ujęcie to ukazuje ją jako naturalną konsekwencję zasad porządku i addytywności w obrębie struktury pierwszości. Mechanizm certyfikacji ma charakter wewnętrzny — opiera się na relacjach pomiędzy elementami tej samej przestrzeni eliminacyjnej — i wskazuje, że złożone własności liczb mogą wynikać z lokalnych powiązań. Tym samym podejście to rozwija ideę prymarności jako zjawiska emergentnego, powstającego z deterministycznych reguł strukturalnych, bez konieczności odwoływania się do globalnych modeli analitycznych.

Remark 23 (Interpretacja konstrukcyjna). Corollary 3 gwarantuje, że proces eliminacyjno-addytywny jest zawsze skończony: dla każdej liczby parzystej N istnieje moment stabilizacji czubka P^* , po którym wszystkie interferencyjne luki zostają usunięte i przestrzeń addytywna staje się lokalnie pełna (por. Lem. 6).

1.4 Zjawisko interferencji w zbiorze liczb pierwszych

1.4.1 Wzorce eliminacyjne i ich nakładanie

Przykład 3 (Przykład 1.1: Wzorec eliminacyjny $\{2, 3\}$). Zakres konstrukcyjny: $(U, 6U]$, ponieważ $\text{lcm}(2, 3) = 6$.

Stosujemy wzorec eliminacyjny względem $P = \{2, 3\}$, eliminując wszystkie elementy nU , dla których:

$$n \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{lub} \quad n \equiv 0 \pmod{3}.$$

Eliminacja obejmuje pozycje:

$$E_P = \{2U, 3U, 4U, 6U\},$$

pozostają pozycje nieeliminowane:

$$R_P = \{U, 5U\}.$$

W naturalnym zakresie $(2U, 6U]$ jedynym elementem przetrwałym jest $5U$, odpowiadający klasycznej liczbie pierwszej 5.

Przykład 4 (Przykład 1.2: Interferencja wzorców $\{2, 3\}$ i $\{5, 7\}$). Niech:

$$L_A = \text{lcm}(2, 3) = 6, \quad L_B = \text{lcm}(5, 7) = 35.$$

Zbiór elementów nieeliminowanych przez wzorec $\{2, 3\}$ spełnia:

$$n \not\equiv 0 \pmod{2}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Dołączenie nowego wzorca $\{5, 7\}$ wprowadza niezależną siatkę eliminacyjną o okresie $L_B = 35$. Nakładanie się cykli L_A i L_B powoduje lokalne zaburzenia w punktach wspólnych kongruencji, czyli interferencję obu rytmów.

Eliminowane pozycje:

$$E_{A \cup B} = \{5, 7, 25, 35, 49, 55, 65, 77, 85, 91, 95, \dots\}.$$

Przykładowe przesunięcie:

$$25 = 35 - 10 = 35 - (6 \times 1 + 4),$$

czyli lokalna deformacja względem cyklu $L_A = 6$.

Interferencja jest tu zjawiskiem *fazowym* — cykle o różnych okresach nakładają się, generując punkty wspólne (interferencja destrukcyjna) lub przerwy w eliminacji (interferencja konstruktywna).

Przykład 5 (Przykład 1.3: Interferencja rozszerzonego wzorca $\{2, 3, 5\}$). Dla:

$$L_A = \text{lcm}(2, 3) = 6, \quad L_B = \text{lcm}(2, 3, 5) = 30.$$

Nowy czynnik 5 wprowadza deformację w rytmie eliminacyjnym o okresie $L_B = 30$. Zaburzenia pojawiają się w punktach przesuniętych względem okresu L_A :

$$30 \pm 6n.$$

Przykłady:

$$25 = 30 - 5 = 30 - (6 \times 1 + 0), \quad 55 = 30 + 25 = 30 + (6 \times 4 + 1).$$

Każde nowe źródło (liczba pierwsza) wprowadza nowy okres, który z dotychczasową strukturą tworzy interferencyjny układ kongruencji. Zjawisko to stanowi bezpośredni odpowiednik zjawiska superpozycji w analizie falowej i zapowiada uogólnienie w postaci chińskiego twierdzenia o resztach (CRT), które opisuje wzajemną zgodność cykli.

1.4.2 Wzorce eliminacyjne jako niezależne cykle kongruencyjne

Niech $P_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ oznacza dowolny skończony zbiór elementów pierwszych. Każdy taki zbiór definiuje własny *wzorzec eliminacyjny* o okresie

$$L_k = \text{lcm}(p_1, p_2, \dots, p_k),$$

czyli najmniejszą wspólną wielokrotność jego źródeł.

Wzorzec W_k można interpretować jako niezależny cykl kongruencyjny, opisany przez układ równań:

$$n \equiv 0 \pmod{p_i} \quad \text{dla niektórych } p_i \in P_k.$$

Każdy taki cykl wprowadza w przestrzeni rytm eliminacyjny o własnej rozdzielczości i fazie.

Dla dwóch dowolnych wzorców W_k i W_m , o okresach odpowiednio L_k i L_m , interferencja powstaje przez ich nakładanie się w obrębie wspólnej wielokrotności:

$$L_{k,m} = \text{lcm}(L_k, L_m).$$

Nie ma wymogu, by wzorce te tworzyły ciąg rosnący względem zbioru liczb pierwszych — mogą być dowolnymi podzbiormi, generującymi różne typy interferencji (lokalne, cykliczne, rezonansowe).

Każdy taki układ ujawnia inną fazę strukturalną, która w skali globalnej odpowiada obserwowanej nierównomierności odstępów między liczbami pierwszymi (*prime gaps*). Zjawisko interferencji jest więc nie błędem rozkładu, lecz naturalną konsekwencją nakładania się wielu niezależnych wzorców eliminacyjnych.

1.4.3 Zasada interferencji eliminacyjnej

Definicja 1.28 (Interferencja eliminacyjna). Niech W_k oraz W_m będą dwoma niezależnymi wzorcami eliminacyjnymi, zdefiniowanymi odpowiednio przez zbiory źródeł

$$P_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}, \quad P_m = \{q_1, q_2, \dots, q_m\},$$

oraz okresy

$$L_k = \text{lcm}(P_k), \quad L_m = \text{lcm}(P_m).$$

Wówczas *interferencją eliminacyjną* nazywamy zbiór pozycji n , dla których wzorce W_k i W_m wchodzą w relację kongruencyjną:

$$n \equiv 0 \pmod{p_i} \quad \text{oraz} \quad n \equiv 0 \pmod{q_j}$$

dla pewnych $p_i \in P_k, q_j \in P_m$.

Okres interferencji określony jest przez:

$$L_{k,m} = \text{lcm}(L_k, L_m),$$

natomiast struktura fazowa — przez różnice resztowe

$$\Delta_{i,j} = (p_i^{-1} \bmod q_j) - (q_j^{-1} \bmod p_i).$$

Twierdzenie 1.17 (Zasada interferencji eliminacyjnej). *Dla dowolnych dwóch niezależnych wzorców W_k i W_m :*

1. *W przedziale jednej wspólnej wielokrotności $L_{k,m}$ zachodzi pełny cykl interferencji pomiędzy ich rytmami eliminacyjnymi.*
2. *Interferencja destrukcyjna zachodzi, gdy istnieją pozycje n , dla których oba wzorce eliminują ten sam element.*
3. *Interferencja konstruktywna zachodzi, gdy fazy cykli nakładają się w taki sposób, że powstaje luka — pozycja nieeliminowana przez żaden z wzorców.*

Zatem:

$$R_{k,m} = (U, L_{k,m}] \setminus (E_{W_k} \cup E_{W_m})$$

opisuje zbiór elementów przetrwałych po złożeniu obu rytmów, a zjawisko interferencji stanowi źródło lokalnych deformacji odstępów między pierwszościami (prime gaps).

Remark 24 (Znaczenie strukturalne interferencji). Zasada interferencji eliminacyjnej opisuje mechanizm powstawania nierównomiernych przerw pomiędzy kolejnymi stanami pierwszości. Każdy nowy wzorzec wprowadza niezależny rytm o okresie $L = \text{lcm}(P)$, który w złożeniu z dotychczasowymi cyklami tworzy układ rezonansowy. W wyniku przesunięć fazowych pomiędzy tymi rytmami pojawiają się lokalne obszary zagęszczenia (konstruktywna interferencja) oraz rozrzedzenia (destruktywna interferencja).

W rezultacie odstępów między elementami przetrwałymi są nieprzypadkowe, lecz wynikają z interferencji rytmów o różnych rozdzielczościach kongruencyjnych. Zjawisko to stanowi strukturalne wyjaśnienie nieregularności przerw obserwowanych w analizie klasycznej. Badania nad tzw. *prime gaps* opisują statystycznie skutki tego procesu, podczas gdy ujęcie strukturalne ujawnia jego deterministyczny mechanizm.

1.4.4 Wniosek: Interferencja jako mechanizm ewolucji wzorca

Wprowadzenie nowych elementów pierwszości do zbioru P nie tylko rozszerza zakres eliminacji, lecz także zmienia strukturę przestrzeni przetrwałej poprzez interferencję cyklicznych wzorców kongruencyjnych. Każdy nowy element $p \in P$ generuje nowe wykluczenia w miejscach wcześniej nieeliminowanych, co prowadzi do:

- **Destrukcyjnej interferencji** — zaniku wcześniej przetrwałych pozycji poprzez nowe warunki kongruencyjne,

- **Konstruktywnej interferencji** — powstawania bardziej regularnych i przewidywalnych wzorców przetrwania dzięki zgodności nowych i istniejących cykli.

Każdy cykl eliminacyjny o okresie $\text{lcm}(P)$ redefiniuje strukturę zbioru R_P , ujawniając nowe źródła pierwszości w miejscach dotychczas niezidentyfikowanych. Zjawisko interferencji nie jest więc efektem ubocznym nakładania się kongruencji, lecz **fundamentalnym mechanizmem ewolucji wzorca eliminacyjnego**. To dzięki niemu możliwe jest dynamiczne generowanie i samoodnawianie zbioru P , bez odwoływania się do klasycznego ograniczenia operacyjnego \sqrt{n} , które ma znaczenie wyłącznie algorytmiczne, a nie strukturalne.

1.4.5 Interferencja wzorców eliminacji

Lemat 10 (Interferencja wzorców). Nakładanie dwóch wzorców eliminacyjnych o długościach L_A i L_B prowadzi do zaburzeń rozmieszczenia przetrwałych w punktach

$$n = kL_B \pm mL_A, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Każdy wzorzec eliminacyjny jest cykliczny o okresie L . Nakładanie dwóch cykli o różnych okresach generuje układ interferencyjny, którego punkty wspólne (lub przesunięte) wyznaczają obszary kolizji i wzmocnienia. \square

Wniosek 6. Wzorce interferencyjne pozwalają przewidywać lokalne maksima i minima gęstości elementów przetrwałych, a zatem strukturę nieregularnych odstępów między stanami pierwszości.

1.4.6 Twierdzenie (Interferencja przez układ kongruencji)

Niech P_A, P_B będą podzbiorami zbioru liczb pierwszych, generującymi wzorce eliminacyjne o cyklach $L_A = \text{lcm}(P_A)$ oraz $L_B = \text{lcm}(P_B)$. Wówczas punkty zaburzeń interferencyjnych $n \in \mathbb{N}$, w których cykle zakłócają przetrwanie liczb, są postaci:

$$n = k \cdot L_B \pm m \cdot L_A, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Dowód formalny (oparty na Chińskim Twierdzeniu o Resztach). Każdy wzorzec eliminacyjny definiuje cykl kongruencji postaci

$$n \equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall p \in P.$$

Po złączeniu warunków eliminacyjnych w zbiorze P_A , otrzymujemy warunek

$$n \equiv r_1 \pmod{L_A},$$

gdzie $r_1 \in \mathbb{Z}_{L_A}$ oznacza pozycję resztową we wzorcu A . Analogicznie dla P_B :

$$n \equiv r_2 \pmod{L_B}.$$

Jeśli analizujemy punkt, w którym wzorzec B nakłada się na pozycję cyklu A , rozpatrujemy układ:

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{L_B}, \\ n \equiv \pm r \pmod{L_A}. \end{cases}$$

Zgodnie z Chińskim Twierdzeniem o Resztach (CRT), taki układ ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(L_A, L_B) \mid r$. Dla rozłącznych lub niezależnych zbiorów P_A, P_B warunek ten jest zawsze spełniony, a ogólne rozwiązania przyjmują postać:

$$n = k \cdot L_B \pm m \cdot L_A, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że interferencja — zaburzenie lub wzmocnienie struktury przetrwałych — występuje w tych punktach n , które są liniowymi kombinacjami cykli podstawowych. ■

1.4.7 Twierdzenie 1 (Most relacyjny między strukturą a pierwszością)

Niech $L > 1$ będzie liczbą całkowitą, a $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ jest liczbą pierwszą i } p \leq \sqrt{L}\}$. Wówczas zachodzi równoważność:

$$\begin{aligned} L \in \text{Prime} &\iff \sum_{p \in P} [p \mid L] = 0 \\ &\iff \prod_{p \in P} (1 - [p \mid L]) = 1 \\ &\iff \gcd\left(L, \prod_{p \in P} p\right) = 1. \end{aligned}$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza notację Iwersona (1, gdy warunek spełniony, 0 w przeciwnym razie).

Dowód. Jeśli L ma dzielnik $p \in P$, to $[p \mid L] = 1$, suma jest dodatnia, a jeden z czynników w produkcie $\prod_{p \in P} (1 - [p \mid L])$ jest zerowy, więc cały iloczyn przyjmuje wartość 0. Równoważnie, $\gcd(L, \prod_{p \in P} p) > 1$. W przeciwnym przypadku wszystkie $[p \mid L] = 0$, iloczyn wynosi 1, a $\gcd(L, \prod_{p \in P} p) = 1$. □

Wersja lokalna (okienkowa). Niech P zawiera wszystkie liczby pierwsze $\leq y$. Wtedy dla każdego $x \in (1, 2y]$ zachodzi:

$$x \in W(P) \iff \sum_{p \in P} [p \mid x] = 0 \iff x \text{ jest liczbą pierwszą.}$$

System relacyjny $W(P)$ — zbiór punktów bez kolizji w cyklach wyznaczonych przez P — lokalnie generuje pełny zbiór liczb pierwszych bez odwołania do operacji arytmetycznych na wartościach.

Uwagi interpretacyjne.

- „Pokrycie przez h_p ” odpowiada podzielności przez p ; „wierzchołek synchronii” to wspólna klasa reszt (CRT); „rafinacja \mathfrak{R}_n ” to dołączenie kolejnej kongruencji.
- Operacje w strukturze relacyjnej są izomorficzne do klasycznych operacji w pierścieniu $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$; różnica ma charakter ontologiczny — działamy na wzorcu eliminacyjnym, a nie na wartościach liczbowych.
- Gęstość lokalną systemu opisuje iloczyn $\prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, a wprowadzenie nowego cyklu p_{k+1} stanowi interferencję strukturalną w sieci relacji.

1.4.8 Wniosek końcowy

Wzór interferencyjny nie jest obserwacją empiryczną ani heurystyką, lecz wynika bezpośrednio z klasycznej teorii kongruencji. CRT gwarantuje istnienie i konstrukcję punktów kolizji cykli, umożliwiając jednoznaczne przewidywanie lokalnych przesunięć w strukturze eliminacyjnej. Stanowi tym samym formalny pomost między teorią kongruencji a strukturą pierwszości.

1.4.9 Typy interferencji: konstruktywne i destrukcyjne

Interferencje wzorców eliminacyjnych mogą mieć dwojaki charakter, zależnie od skutku, jaki wywierają na strukturę przestrzeni przeszukiwania.

Konstruktywna interferencja: Zjawisko, w którym nakładanie się wzorców filtracyjnych wzmacnia stabilność pozycji przetrwałych w przestrzeni eliminacyjnej. W efekcie zwiększa się lokalna spójność układu i utrzymuje lub wzrasta prawdopodobieństwo wystąpienia elementów pierwszych w określonych pozycjach.

Destrukcyjna interferencja: Zjawisko, w którym wzorce eliminacyjne wzajemnie znoszą lub przesuwają pozycje przetrwałe, prowadząc do powstawania lokalnych pustek eliminacyjnych i fluktuacji w rozkładzie przetrwałych miejsc.

Oba typy interferencji są naturalną konsekwencją cyklicznej natury procesu eliminacji i występowania wielokrotnych okresów wyznaczanych przez różne wartości $\text{lcm}(P)$. Modyfikują one lokalną dynamikę przestrzeni przeszukiwania, nie naruszając jednak globalnej zasady wyłaniania się pierwszości poprzez pustkę eliminacyjną.

Przykład. Rozważmy zbiór $P = \{2, 3, 5\}$.

- Wzorzec eliminacyjny $W(P)$ posiada okres $\text{lcm}(2, 3, 5) = 30$.
- Liczby przetrwałe w pierwszym okresie to: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Po dołączeniu nowego wzorca opartego na $p = 7$:

Konstruktywna interferencja Występuje w tych pozycjach, w których nowy cykl eliminacyjny ($p = 7$) pozostaje zgodny fazowo z istniejącym wzorcem, utrzymując przetrwałe pozycje, np. 11 czy 13. Takie nakładanie się wzorców wzmacnia lokalną stabilność układu eliminacyjnego, prowadząc do utrzymania rytmu przetrwałych pozycji w kolejnych cyklach.

Destrukcyjna interferencja Występuje wtedy, gdy nowe cykle eliminują wcześniejsze pozycje przetrwałe, np. 49, 77, 91, 119, 133, 161, 203, z których każda jest przetrwała dla $\{2, 3, 5\}$, lecz $\equiv 0 \pmod{7}$. W takich punktach struktura lokalna ulega zniesieniu — powstają nowe obszary pustki eliminacyjnej.

Interferencja złożona (krzyżowa) Występuje, gdy dwa niezależne cykle kongruencyjne o okresach względnie pierwszych nakładają się dopiero po pełnym przebiegu swoich rytmów. Przykładem jest liczba $437 = 19 \times 23$, w której cykle eliminacyjne 19 i 23 pozostają lokalnie konstruktywne, lecz po osiągnięciu wspólnego okresu kongruencyjnego $\text{lcm}(19, 23) = 437$ prowadzą do globalnej destrukcji — punktu interferencji odległej. Strukturalnie odpowiada to zjawisku długozasięgowej kolizji rytmów, stanowiącej podstawę mechanizmów stabilności znanych z układów takich jak RSA, gdzie złożenie dwóch niezależnych źródeł pierwszości tworzy trudną do odwrócenia strukturę eliminacyjną.

Interferencja wpływa więc na mikrostrukturę układu liczb nieeliminowanych, powodując lokalne zaburzenia lub stabilizację wzorca eliminacji.

Uwaga: Cykliczność struktury eliminacyjnej pozwala opisać rozmieszczenie pierwszości jako uporządkowane według powtarzalnych wzorców kongruencyjnych. Analiza ograniczona do pozycji przetrwałych w jednym cyklu może istotnie zmniejszyć złożoność badania struktury pierwszości.

1.4.10 Tożsamość zbioru liczb pierwszych

Zbiór liczb pierwszych \mathbb{P} można ująć konstrukcyjnie jako zbiór wszystkich elementów większych niż jednostka U , które nie zostały wyeliminowane przez żaden wcześniejszy element zbioru P . Formalnie:

$$\mathbb{P} = \{ n > U : \forall p \in P, p \nmid n \}.$$

1.4.11 Rozszerzanie wzorca i domknięcie zbioru eliminacyjnego

Proces konstrukcji zbioru P przebiega iteracyjnie, począwszy od najmniejszego źródła pierwszości $U_2 = 2$:

- Dla $P = \{2\}$ eliminujemy liczby parzyste w zakresie $(U, 4]$.
- Pozostaje 3, która zostaje dodana do zbioru P .
- Dla $P = \{2, 3\}$ zakres działania rozszerza się do $(U, 6]$; liczba 5 przetrwa i zostaje włączona do zbioru.
- Następnie kolejne iteracje generują 7, 11, 13, 17, 19, ...

Każdy zakres $(U, 2P_{\max}]$ stanowi nowy cykl konstrukcyjny. Każdy element, który w danym zakresie nie zostaje wyeliminowany, zostaje dołączony do zbioru P .

Zasada domknięcia: Każdy element, który nie może być skonstruowany jako iloczyn elementów już należących do zbioru P , staje się jego nowym składnikiem. W ten sposób zbiór liczb pierwszych można zdefiniować jako strukturę elementów nierekonstruowalnych multiplikatywnie względem poprzednich.

1.4.12 Załącznik: Macierz eliminacji dla liczb od 1 do 23

	1	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
pierwsza		2									
pierwsza		3									
		4	1								
pierwsza		5									
		6	1	1							
pierwsza		7									
		8	1								
		9		1							
		10	1		1						
pierwsza		11									
		12	1	1							
pierwsza		13									
		14	1			1					
		15		1	1						
		16	1								
pierwsza		17									
		18	1	1							
pierwsza		19									
		20	1		1						
		21		1		1					
		22	1				1				
pierwsza		23									
		24	1	1							

Rysunek 7: Macierz eliminacji liczb pierwszych w zakresie 1–23.

1.4.13 Formalizacja algorytmiczna procesu eliminacyjnego

Proces wyłaniania liczb pierwszych można ująć w dwóch równoważnych formach: deterministycznej (iteracyjnej) oraz emergentnej (fazowej). Obie implementują tę samą zasadę — *pierwszość jako brak kolizji w układzie kongruencyjnym*.

1. Model deterministyczny (iteracyjny). Niech $P_k = \{p_1, \dots, p_k\}$ będzie aktualnym zbiorem źródeł. Dla $P_{\max} = \max P_k$ definiujemy przedział konstrukcyjny $I_k = (U, 2P_{\max}]$. Dla każdej liczby $n \in I_k$ definiujemy funkcję eliminacyjną:

$$E_{P_k}(n) = \bigvee_{p \in P_k} [p \mid n],$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza funkcję Iversona. Zbiór przetrwałych w danym kroku konstrukcyjnym to:

$$R_{P_k} = \{n \in I_k : E_{P_k}(n) = 0\}.$$

Każdy element $n \in R_{P_k}$ jest kandydatem na nowe źródło i generuje kolejny zbiór $P_{k+1} = P_k \cup \{n\}$.

Iteracja ta tworzy samopodtrzymujący się system eliminacyjny:

$$P_{k+1} = P_k \cup R_{P_k}, \quad R_{P_k} \subseteq (U, 2P_{\max}].$$

Konstrukcja nie wymaga testowania do \sqrt{n} , ponieważ proces opiera się na pełnym odwzorowaniu relacji podzielności w przedziale zdeterminowanym przez P_{\max} , a nie na zewnętrznym ograniczeniu arytmetycznym.

2. Model fazowy (emergentny). Niech dla każdej liczby pierwszej p zdefiniowany będzie cykl binarny:

$$C_p = (1, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^p,$$

w którym pozycja bitu 1 odpowiada reszcie $r \equiv 0 \pmod{p}$. Dla danej pozycji n definiujemy operator rotacji:

$$\rho_p(n) = C_p^{(n \bmod p)}.$$

Wartość eliminacyjna w punkcie n wynosi:

$$E(n) = \bigvee_{p \in P} \rho_p(n)[0],$$

gdzie $\rho_p(n)[0]$ oznacza bit na pozycji zerowej po rotacji.

Zatem:

$$E(n) = 0 \iff \forall_{p \in P} n \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Pozycje n spełniające ten warunek są *fazowo przetrwałe*:

$$R_P^{(\text{phase})} = \{n \in \mathbb{N} : E(n) = 0\}.$$

Model fazowy nie używa pojęcia zakresu ani iteracji; wszystkie cykle istnieją równocześnie, a liczby pierwsze pojawiają się jako *stany braku kolizji* w układzie rezonansowym. Formalnie jest to system logiczny:

$$E(n) = 0 \iff \bigwedge_{p \in P} (n \bmod p \neq 0),$$

który jest izomorficzny wobec konstrukcji iteracyjnej, z tą różnicą, że operuje na przestrzeni faz, a nie na przestrzeni wartości.

3. Dualizm konstrukcji i emergencji. Oba modele są równoważne względem reguły eliminacji:

$$R_P = R_P^{(\text{phase})}.$$

Pierwszy opisuje *proces przyczynowy* (rozszerzanie zbioru P poprzez kolejne iteracje), drugi — *proces rezonansowy* (samoorganizację układu kongruencji w stanie stabilnym). W ujęciu strukturalnym są to dwa przedstawienia tej samej dynamiki: *pierwszość powstaje w punktach, w których żadna częstotliwość eliminacyjna nie uderza*.

Interpretacja. System rotacyjny $\{C_p : p \in P\}$ implementuje mechaniczny test kongruencji bez operacji arytmetycznych. Każda liczba n odpowiada wspólnemu stanowi wszystkich cykli; jeżeli w żadnym z nich nie występuje bit eliminacyjny (pozycja zerowa), pozycja n stanowi punkt przetrwały — *źródło nowej pierwszości*. System ten jest zatem logicznie równoważny klasycznemu sitowi Eratostenesa, lecz ujmuje proces w sposób konstrukcyjny i ontologiczny: pierwszość jest *brakiem kolizji* w rezonansowej sieci kongruencji.

1.4.14 Interpretacja operatora kongruencji i strukturalne znaczenie eliminacji

W zaprezentowanych konstrukcjach operator reszty z dzielenia (%) pełni wyłącznie funkcję *technicznego sprawdzania warunków kongruencyjnych*. Nie stanowi istoty metody, lecz implementuje relację:

$$n \bmod p = 0 \iff n \in E_P.$$

W ujęciu strukturalnym operujemy nie na wartościach arytmetycznych, lecz na układzie relacji kongruencyjnych, tworzących deterministyczny wzorzec eliminacyjny. Proces eliminacji nie polega na etapowym usuwaniu wielokrotności, jak w klasycznym sicie Eratostenesa, lecz na jednoczesnym pokryciu całego przedziału $(U, 2P_{\max}]$ warunkami kongruencji dla wszystkich $p \in P$.

W tym sensie operator % jest jedynie lokalnym testem przynależności do wzorca:

$$E_P(n) = \bigvee_{p \in P} [n \bmod p = 0],$$

a nie źródłem samej struktury. Struktura eliminacyjna jest bowiem deterministycznym odwzorowaniem relacji kongruencji w przestrzeni \mathbb{N} , a pierwszość stanowi stan *braku przynależności* do żadnego z tych wzorców.

1.4.15 Wniosek końcowy: pierwszość jako konieczność strukturalna

Konstrukcja eliminacyjna ujawnia, że liczby pierwsze nie są przypadkowymi wyjątkami, lecz logiczną konsekwencją pełnego systemu wykluczania. Każda liczba, która nie została pokryta przez żaden wzorzec kongruencyjny, musi pozostać w przestrzeni przetrwałej — a więc jest elementem pierwszym. Pierwszość jest zatem *stanem nieeliminowalnym* w relacyjnym układzie kongruencji, a nie efektem probabilistycznej fluktuacji.

Zbiór liczb pierwszych \mathbb{P} można więc określić jako:

$$\mathbb{P} = \{ n \in \mathbb{N} : \forall_{p < n} n \bmod p \neq 0 \},$$

lecz w konstrukcyjnym ujęciu nie wymaga to testowania wszystkich $p < n$, ponieważ zakres $(U, 2P_{\max}]$ gwarantuje pełne pokrycie i samodomknięcie procesu.

1.4.16 Złożoność strukturalna

Deterministyczny charakter rozmieszczenia liczb pierwszych nie eliminuje trudności obliczeniowych: ich odnajdywanie wymaga zachowania integralności całego wzorca eliminacyjnego do danego N . Każdy nowy element pierwszości jest emergentnym skutkiem współdziałania wszystkich wcześniejszych źródeł, co sprawia, że *globalna spójność struktury* stanowi warunek konieczny poprawności wyniku.

Złożoność obliczeniowa wynika zatem nie z braku reguły, lecz z konieczności uwzględnienia pełni relacji eliminacyjnych — każdy element zależy od całego układu. Można to ująć syntetycznie:

Trudność obliczeniowa nie wynika z chaosu, lecz z całościowej spójności.

Remark 25 (Charakterystyka metody). W odróżnieniu od klasycznych podejść:

1. system deterministyczny w przód pozwala przewidzieć *gdzie* pojawi się nowa pierwszość w zakresie $(U, 2P_{\max}]$, bez testów podzielności ani aproksymacji,
2. system emergentny (fazowy) opisuje *dłaczego* pojawia się ona właśnie tam — jako stan braku kolizji w układzie rezonansowym.

Oba tryby są równoważne i wzajemnie domykają opis strukturalny: pierwszość jest koniecznością wynikającą z relacyjnej pełni układu kongruencji.

Warto podkreślić, że opisany tu mechanizm eliminacji ma charakter czysto lokalny: każda liczba działa wyłącznie w obrębie własnego cyklu kongruencyjnego, bez dostępu do informacji globalnej. Mimo tej prostoty nakładanie się wielu takich rytmów prowadzi do bogatej struktury rozmieszczenia liczb przetrwałych.

Pełniejsze ujęcie tego zjawiska, obejmujące analizę fazową i rolę operatorów odpowiedzialnych za globalny obraz rytmów, przedstawiono w Fil. III (por. sekcja 3.12). Dopiero tam pokazane jest, jak lokalne reguły prowadzą do pełnej dynamiki układu.

1.4.17 Dalsze kierunki badań

Prezentowana konstrukcja ujawnia lokalną i globalną strukturę rozmieszczenia liczb pierwszych poprzez deterministyczny proces eliminacyjny. Otwiera to nowe możliwości badawcze w ramach zarówno teorii liczb, jak i algebry strukturalnej:

- **Analiza interferencji dla dużych N :** badanie efektów nakładania się cykli kongruencyjnych przy rosnącym zbiorze P , w tym analiza gęstości, rozrzutu i periodyki „pustek eliminacyjnych”.
- **Modelowanie rezonansów strukturalnych:** identyfikacja układów kongruencyjnych, które prowadzą do regularnych lub nieregularnych klastrów przetrwałych pozycji — potencjalnych miejsc skupienia liczb pierwszych.
- **Uogólnienie na nieskończoność:** opis procesu rozszerzania wzorca P w granicy $N \rightarrow \infty$, jako konstrukcji prowadzącej do asymptotycznej rekonstrukcji zbioru \mathbb{P} oraz formalnego powiązania z funkcją $\zeta(s)$.
- **Porównanie z klasyką:** zestawienie wyników konstrukcyjnych z klasycznymi przybliżeniami rozkładu liczb pierwszych (funkcja $\pi(x)$, hipoteza Riemanna, liczby bliźniacze, gęstość Dirichleta).
- **Formalizacja algebraiczna:** opis procesu eliminacyjnego w ramach pierścieni resztowych $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ oraz jego uogólnienie do sieci izomorficznych układów kongruencyjnych, co pozwala badać własności interferencji jako operacje w przestrzeni relacji, a nie w przestrzeni wartości.
- **Analiza asymptotyczna i spektralna:** rozwinięcie konstrukcji do postaci funkcji generującej gęstość przetrwałych pozycji,

$$\rho(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

oraz badanie jej fluktuacji i rezonansów w granicy $x \rightarrow \infty$, z wykorzystaniem narzędzi analizy harmoniczej i teorii operatorów.

Każdy z powyższych kierunków umożliwia dalsze pogłębienie rozumienia deterministycznej natury liczb pierwszych. Konstrukcja nie tylko opisuje *gdzie* pojawia się pierwszość, lecz dostarcza również formalnych narzędzi, które pozwalają analizować jej strukturę w języku algebry, topologii relacyjnej i teorii gęstości.

1.5 Strukturalne ujęcie pierwszości

Niech g będzie ustalonym generatorem (jednostką siatki). Definiujemy zbiór

$$N_g := \{n \cdot g \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

1.5.1 Operacje

Na N_g definiujemy dwie operacje:

$$(m \cdot g) \oplus (n \cdot g) := (m + n) \cdot g, \quad (m \cdot g) \odot (n \cdot g) := (mn) \cdot g.$$

Struktura (N_g, \oplus, \odot) jest semipierścieniem izomorficznym z $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

1.5.2 System addytywny

Struktura (N_g, \oplus, \odot) jest *systemem addytywnym*, ponieważ wszystkie relacje i operacje można sprowadzić do iteracji jednej jednostki g poprzez dodawanie. Mnożenie w tej przestrzeni ma charakter wtórny:

$$(m \cdot g) \odot (n \cdot g) = \underbrace{(m \cdot g) \oplus (m \cdot g) \oplus \cdots \oplus (m \cdot g)}_{n \text{ razy}} = (mn) \cdot g.$$

W konsekwencji:

1. struktura mnożenia jest całkowicie zdeterminowana przez dodawanie,
2. pierwszość można interpretować jako *nierozkładalność addytywną* w przestrzeni indeksów,
3. wybór jednostki g ustala jedynie *skalę addytywną*, nie zmieniając topologii relacji.

Z tego powodu przestrzeń N_g jest nie tylko semipierścieniem, lecz również *systemem addytywnym iteracyjnym*, gdzie struktura pierwszości wynika z dynamiki dodawania jednostki.

1.5.3 System multiplikatywny i przeniesienie pierwszości

Rozważmy przestrzeń generowaną przez mnożenie jednostki strukturalnej S :

$$M_S := \{S^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

W przeciwieństwie do systemu addytywnego N_g , w którym iteracja polega na dodawaniu jednostki g , tutaj iteracja odbywa się poprzez potęgowanie. Zamiast ciągu $(1, 2, 3, 4, \dots)$ mamy ciąg (S, S^2, S^3, \dots) .

Pierwszość pozostaje zachowana, lecz jej lokalizacja ulega przesunięciu:

- w systemie addytywnym N_g jest to nierozkładalność indeksów n ,
- w systemie multiplikatywnym M_S jest to nierozkładalność wykładników n .

Inaczej mówiąc: element S^p jest *pierwszy*, jeśli jego wykładnik p jest liczbą pierwszą.

Jeśli przyjmiemy jednostkę $S = \pi$, to przestrzeń $M_\pi = \{\pi, \pi^2, \pi^3, \dots\}$ nie posiada naturalnej iteracji „1, 2, 3” w klasycznym sensie. Poruszamy się w niej wyłącznie po znanych potęgach π , a relacje addytywne zostają zastąpione relacjami potęgowymi. Pierwszość ujawnia się w wykładnikach, czyli w strukturze, nie w wartościach liczb.

Analogicznie, jeśli przestrzeń jest generowana przez pierwiastek R , np. $R = \sqrt{2}$, to jej iteracja przyjmuje postać

$$R, R^2, R^3, \dots,$$

a pierwszość ujawnia się w *stopniach pierwiastkowych*: element $R^{1/p}$ jest odpowiednikiem pierwszości w przestrzeni pierwiastkowej.

Zatem można wyróżnić dwa typy systemów:

1. **Addytywny** — iteracja przez dodawanie jednostki g , pierwszość w indeksach.
2. **Multiplikatywny** — iteracja przez potęgowanie jednostki S , pierwszość w wykładnikach.

Oba systemy są izomorficzne w sensie strukturalnym, różnią się jedynie sposobem reprezentacji iteracji. Pierwszość jest więc własnością struktury iteracyjnej, a nie sposobu jej zapisu.

Symetria potęgowo–pierwiastkowa. System multiplikatywny można odwrócić, przechodząc od potęg do pierwiastków:

$$P_S := \{S^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Iteracja odbywa się tu w kierunku odwrotnym — przez dzielenie wykładnika, a nie jego zwiększanie. Podobnie jak poprzednio, pierwszość ujawnia się w strukturze wykładników:

$S^{1/p}$ jest „pierwszy” w przestrzeni pierwiastkowej wtedy i tylko wtedy, gdy p jest pierwsze.

W tym ujęciu $S^{1/2}$, $S^{1/3}$, $S^{1/5}$ stanowią *pierwotne pierwiastki strukturalne*, a wszystkie inne $S^{1/n}$ są ich wielokrotnościami w sensie potęgowym:

$$S^{1/4} = (S^{1/2})^{1/2}, \quad S^{1/6} = (S^{1/3})^{1/2}, \text{ itd.}$$

Tym samym system pierwiastkowy P_S jest lustrzanym odbiciem systemu potęgowego M_S : pierwszość pozostaje niezmienna, a jedynie kierunek iteracji ulega odwróceniu. Pierwiastki strukturalne można więc traktować jako *fundamentalne jednostki dzielnosci wykładników*, analogiczne do ról liczb pierwszych w przestrzeni addytywnej.

1.5.4 Izomorfizm

Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi_g : \mathbb{N} \rightarrow N_g, \quad \varphi_g(n) = n \cdot g.$$

Lemat 11. Odwzorowanie φ_g jest izomorfizmem semipierścieni.

Dowód. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\varphi_g(m+n) = (m+n) \cdot g = (m \cdot g) \oplus (n \cdot g) = \varphi_g(m) \oplus \varphi_g(n),$$

oraz

$$\varphi_g(mn) = (mn) \cdot g = (m \cdot g) \odot (n \cdot g) = \varphi_g(m) \odot \varphi_g(n).$$

□

1.5.5 Pierwszość

Definicja 1.29. Liczba $p > 1$ jest pierwsza w \mathbb{N} , jeśli dla $ab = p$ mamy $a = 1$ lub $b = 1$.

Definicja 1.30. Element $p \cdot g \in N_g$ nazwiemy *g-pierwszym*, jeśli dla

$$x \odot y = p \cdot g$$

zachodzi $x = g$ lub $y = g$.

Twierdzenie 1.18. p jest pierwsze w \mathbb{N} wtedy i tylko wtedy, gdy $p \cdot g$ jest *g-pierwsze* w N_g .

Dowód. Bezpośrednio z izomorfizmu φ_g , który zachowuje rozkłady mnożeniowe. Jedyne w \mathbb{N} odpowiada g w N_g , więc definicje pierwszości są równoważne. □

1.5.6 Wniosek

Pierwszość jest własnością *indeksów* $n \in \mathbb{N}$, a nie generatora g . Różne wybory generatora (np. $g = 1$, $g = \pi$, $g = \varphi$) dają izomorficzne struktury, w których zbiór elementów pierwszych odpowiada zawsze zbiorowi liczb pierwszych w \mathbb{N} . Naturalne liczby nie są więc wartościami w przestrzeni, lecz *współrzędnymi*, które niosą strukturę iteracji.

1.5.7 Rozszerzenie do wymiernych

Definiujemy

$$Q_g := \{q \cdot g \mid q \in \mathbb{Q}\},$$

z operacjami

$$(q \cdot g) \oplus (r \cdot g) := (q+r) \cdot g, \quad (q \cdot g) \odot (r \cdot g) := (qr) \cdot g.$$

Lemat 12. Odwzorowanie $\varphi_g : \mathbb{Q} \rightarrow Q_g$, dane przez $\varphi_g(q) = q \cdot g$, jest izomorfizmem pierścieni.

Dowód. Dowód identyczny jak w przypadku \mathbb{N} : operacje dodawania i mnożenia sprowadzają się do działań na współczynnikach $q, r \in \mathbb{Q}$. □

1.5.8 Pierwszość w mianownikach

Każdy $q \in \mathbb{Q}$ zapisany w postaci zredukowanej $q = \frac{a}{b}$ (ze $\gcd(a, b) = 1$) posiada rozkład arytmetyczny:

$$a = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \quad b = \prod_j q_j^{\beta_j},$$

gdzie p_i, q_j są liczbami pierwszymi, a wykładniki $\alpha_i, \beta_j \geq 0$.

Definicja 1.31. Dla $q \in \mathbb{Q}$ definiujemy p -adyczną ocenę:

$$v_p(q) = v_p(a) - v_p(b).$$

Wartości v_p opisują strukturę rozkładu wymiernych na czynniki pierwsze.

- Dodatnie wartości v_p oznaczają obecność czynnika p w liczniku.
- Ujemne wartości v_p oznaczają obecność czynnika p w mianowniku.

Twierdzenie 1.19. *Pierwszość w mianowniku (p występujące w b) jest równoważna ujemnej wartości $v_p(q)$.*

Dowód. Jeśli b zawiera p , to $v_p(b) > 0$, a zatem $v_p(q) < 0$. Na odwrót, jeśli $v_p(q) < 0$, to b musi zawierać czynnik p . Dowód elementarny. \square

1.5.9 Interpretacja strukturalna

W rozszerzonej przestrzeni Q_g pierwszość nie ogranicza się do indeksów w \mathbb{N} , lecz ujawnia się również w mianownikach wymiernych. Elementy postaci $g^{1/p}$, gdzie p jest pierwsze, odpowiadają minimalnym nierozkładalnym pierwiastkom w tej przestrzeni. Z kolei elementy takie jak $g^{1/4}$ rozkładają się (np. $g^{1/4} = (g^{1/2})^{1/2}$), więc są „złożone” w sensie struktury mianownikowej.

1.5.10 Wniosek

Rozszerzenie do wymiernych pokazuje, że:

1. Pierwszość w liczbach naturalnych odpowiada nierozkładalności indeksów n .
2. Pierwszość w wymiernych objawia się również w mianownikach, poprzez ujemne wartości p -adycznych ocen v_p .
3. Struktura pierwotności pozostaje niezależna od wyboru generatora g , a jej lokalizacja (licznik/mianownik) zależy jedynie od znaku wykładników w rozkładzie elementów.

1.5.11 Interpretacja geometryczna

Siatka addytywna. Przestrzeń $N_g = \{n \cdot g \mid n \in \mathbb{N}\}$ można interpretować geometrycznie jako *jednowymiarową siatkę* wzdłuż prostej rzeczywistej, gdzie kolejne punkty są równomiernie oddalone o krok g . Wybór generatora g zmienia skalę tej siatki, ale nie jej strukturę. Indeksy n działają jako *współrzędne dyskretne* wzdłuż osi.

Zagęszczenie wymierne. Rozszerzenie do $Q_g = \{q \cdot g \mid q \in \mathbb{Q}\}$ odpowiada zagęszczeniu siatki – zamiast tylko wielokrotności g , pojawiają się także punkty „pomiędzy”, odpowiadające wymiernym współczynnikom q . Każdy mianownik b w $q = a/b$ można traktować jako podział segmentu $a \cdot g$ na b równych części.

Pierwszość w siatce. W tym obrazie:

- Pierwszość indeksów n (w N_g) oznacza, że punkt $n \cdot g$ nie daje się uzyskać przez równomierne grupowanie mniejszych kroków (poza trywialnym przypadkiem $1 \cdot g$).
- Pierwszość w mianowniku (w Q_g) oznacza, że punkt $\frac{1}{p} \cdot g$ jest *najmniejszym niepodzielnym podziałem* segmentu g .

Spójność warstwowa. Obraz geometryczny ujawnia naturalne *dwuwarstwowe rozwarstwienie*:

1. **Warstwa indeksów** — odpowiada strukturze liczb naturalnych, które są współrzędnymi siatki (pierwszość w indeksach).
2. **Warstwa generatora** — odpowiada wyborowi skali g , która ustala fizyczny rozmiar kroku, ale nie wpływa na strukturę pierwszości.

Wniosek. Pierwszość ma charakter *strukturalny*, a nie *wartościowy*. W warstwie indeksów przejawia się jako nierozkładalność liczb naturalnych, w warstwie wymiernej jako nierozkładalność podziałów odcinka. W obu przypadkach geometryczny obraz siatki i jej zagęszczeń pokazuje, że wybór generatora g jest jedynie skalą, a nie źródłem własności pierwszości.

1.5.12 Twierdzenie końcowe: niezmienniczość pierwszości

Twierdzenie 1.20 (Niezmienniczość pierwszości). *Dla dowolnego generatora $g \neq 0$ struktura (N_g, \oplus, \odot) jest izomorficzna z $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, a struktura (Q_g, \oplus, \odot) z $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.*

W szczególności:

1. *Element $p \cdot g \in N_g$ jest g -pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą w \mathbb{N} .*
2. *W Q_g obecność czynnika pierwszego w mianowniku b odpowiada ujemnej wartości $v_p(q)$ i jest niezależna od wyboru g .*

Dowód. Izomorfizm $\varphi_g : n \mapsto n \cdot g$ zachowuje operacje. Pierwszość i rozkłady są inwariantami izomorfizmu. Dla Q_g rozszerzamy definicję na \mathbb{Q} , a analiza przez p -adyczne oceny v_p pokazuje, że czynniki w liczniku i mianowniku są również niezależne od g . \square

1.5.13 Konkluzja

Pierwszość nie jest własnością wartości liczbowych, lecz własnością struktury iteracji w indeksach naturalnych. Wybór generatora g ustala jedynie skalę siatki, ale nie wpływa na rozkłady ani na zbiór elementów pierwszych.

Problem historyczny „czy 1 jest liczbą pierwszą?” okazuje się konsekwencją pomieszczenia dwóch warstw: generatora (skali) i indeksów (iteracji). Dopiero rozdzielenie tych warstw daje pełne, spójne ujęcie, w którym pierwszość jest absolutna, a jedność 1 jest tylko szczególnym wyborem generatora g .

1.5.14 Uwaga historyczna

Pojęcie liczby pierwszej było od starożytności obciążone problemem *jedyńki*. Euklides w *Elementach* traktował 1 jako odcinek elementarny i zaliczał ją do liczb pierwszych, gdyż nie posiadała żadnych dzielników poza sobą samą. Problem pojawiał się przy rozkładach: wówczas unikalność faktoryzacji stawała się niejasna, bo np. $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$

Dopiero w XIX wieku, wraz z pracami Gaussa nad teorią liczb i fundamentalnym twierdzeniem arytmetyki, przyjęto rozróżnienie: 1 nie jest pierwsza, ponieważ jest elementem neutralnym mnożenia i nie pełni roli „cegielki” w faktoryzacji.

Jeszcze później, aksjomaty Peano (1889) oraz rozwój teorii grup i pierścieni umożliwiły ścisłe oddzielenie:

- **indeksów** (naturalnych liczb, które kodują iterację),
- **generatora** (jednostki 1 lub dowolnego g),

i wykazanie, że unikalność rozkładu i pojęcie pierwszości są inwariantami strukturalnymi, niezależnymi od wyboru generatora.

Interpretacja strukturalna problemu jedyńki. W zapisie $6 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ każdy dodatkowy czynnik 1 można interpretować nie jako „mnożenie przez neutralny element”, lecz jako *nałożenie tej samej przestrzeni na samą siebie*. W klasycznej arytmetyce przyjęto, że 1 jest neutralne, ponieważ dla $S = 1$ zachodzi przypadkowa równość $S^n = S$ dla wszystkich n . Jednak gdy przestrzeń ma jednostkę $S \neq 1$, relacja ta traci sens:

$$S \cdot S \cdot S = S^3 \neq S.$$

Oznacza to, że operacja powielania jednostki nie jest neutralna, lecz zmienia naturę przestrzeni, prowadząc do jej wielokrotnego nałożenia. Problem jedyńki w starożytnej teorii liczb nie był więc błędem rachunkowym, lecz wynikiem utożsamienia wartości 1 z jednostką przestrzenną, która tylko w szczególnym przypadku ($S = 1$) nie wprowadzała deformacji.

W ujęciu strukturalnym poprawna neutralność występuje jedynie wtedy, gdy jednostka jest tożsama z *bazową strukturą przestrzeni* — nie zaś z jej wartością liczbową. Wtedy dopiero możliwe jest spójne rozdzielenie pojęcia „elementu neutralnego” od pojęcia „jednostki przestrzennej”.

Wniosek historyczny. Problem jedynki nie był więc błędem starożytnych, lecz efektem braku narzędzi do rozdzielenia warstw „indeksu” i „skali”. Dopiero język algebry abstrakcyjnej pokazał, że pierwszość tkwi w indeksach naturalnych, a wybór generatora jest kwestią konwencji.

Filar 2: Gęstość liczb pierwszych

2.1 Wprowadzenie

W teorii liczb rozkład liczb pierwszych uznaje się za nieregularny. Ich średnią gęstość w granicy dla dużych N przybliża asymptotyczny wzór:

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}.$$

Wskazuje on, że częstość występowania liczb pierwszych maleje logarytmicznie, lecz nie daje informacji o ich lokalnym rozmieszczeniu.

Analiza zbioru liczb naturalnych z uwzględnieniem podzielności przez ustalony zestaw liczb pierwszych umożliwia natomiast wyznaczenie dokładnej proporcji liczb niepodzielnych w skończonym zakresie. Tak określona proporcja stanowi *predykcijną gęstość*, ponieważ wskazuje precyzyjnie, w których pozycjach mogą występować kandydaci na liczby pierwsze.

2.2 Definicja gęstości przez filtrację

Liczby pierwsze można określić jako liczby niepodzielne przez żadne mniejsze pierwsze. Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ będzie skończonym zbiorem liczb pierwszych. Tworzymy cykl o długości:

$$L = \text{lcm}(p_1, \dots, p_k),$$

i analizujemy liczby w przedziale $(1, L]$. Wyróżniamy dwie klasy:

- liczby podzielne przez dowolny element P – *przefiltrowane*,
- liczby niepodzielne przez żaden element P – *nieprzefiltrowane*.

Ułamek liczb nieprzefiltrowanych w tym zakresie opisuje wzór:

$$D = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2.3 Przykład

Dla $P = \{2, 3\}$ otrzymujemy $L = 6$. W zakresie $(1, 6]$:

Liczba	Podzielność
1	brak
2	przez 2
3	przez 3
4	przez 2
5	brak
6	przez 2 i 3

Nieprzefiltrowane pozycje to 1 i 5, więc z 6 liczb pozostają 2:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

co zgadza się z obliczeniem:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2.4 Konstrukcyjny wzór gęstości jako równoważnik klasycznego przybliżenia

Klasyczne podejście do badania rozkładu liczb pierwszych opiera się na wzorze asymptotycznym:

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N},$$

uzyskanym metodami analizy zespolonej. W ujęciu konstrukcyjnym – opartym na pełnej strukturze eliminacyjnej i interferencjach cykli kongruencyjnych – gęstość wynika bezpośrednio z mechanizmu filtracji.

Definicje. Niech:

$$P_y = \{p \in \mathbb{P} : p \leq y\}, \quad L_y = \text{lcm}(P_y),$$

oraz:

$$D_y = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Wielkość D_y interpretujemy jako *gęstość kandydatów na liczby pierwsze* pozostających po filtracji przez wszystkie $p \leq y$ w jednym cyklu długości L_y .

Lokalna ścisłość. W przedziale $(1, 2y]$ filtracja przez P_y jest kompletna:

$$\#\{\text{przetrwali w } (1, 2y]\} = \pi(2y) - \pi(1),$$

co oznacza, że D_y dokładnie opisuje rzeczywistą gęstość liczb pierwszych w tym zakresie.

Globalne rozszerzenie. Dla ogólnego N liczbę kandydatów po filtracji przez P_y opisuje zależność:

$$S_y(N) = ND_y + o(N, y),$$

gdzie $o(N, y)$ to błąd niepełnego cyklu. Dodanie kolejnych liczb pierwszych $p > y$ usuwa fałszywych kandydatów w pozycjach przewidywanych przez relację interferencyjną:

$$n = kL_B \pm mL_A, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Wzór konstrukcyjny. Po uwzględnieniu kolejnych rozszerzeń zbioru P i interferencji między cyklami otrzymujemy:

$$\pi(N) = N \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + I_y(N) + o(N, y),$$

gdzie $I_y(N)$ stanowi *dokładną poprawkę* związaną z destrukcyjną interferencją nowo dodanych cykli.

W granicy $y \rightarrow \infty$ otrzymujemy:

$$\pi(N) = \frac{N}{\ln N} (1 + \varepsilon(N)), \quad \varepsilon(N) \rightarrow 0,$$

czyli konstrukcyjny równoważnik klasycznego wzoru asymptotycznego.

Uwagi. Klasyczne podejście traktuje wzór asymptotyczny jako założenie, natomiast tutaj stanowi on *konsekwencję lokalnej, deterministycznej filtracji*. Gęstość liczb pierwszych nie jest więc średnią statystyczną, lecz wynika z wewnętrznej struktury procesu eliminacyjnego.

2.5 Klasyczne ujęcie gęstości – Twierdzenie Mertensa

Zanim przejdziemy do porównania podejść, warto przypomnieć klasyczny wynik analizy asymptotycznej, który łączy gęstość liczb pierwszych z iloczynem Mertensa.

Twierdzenie 2.21 (Twierdzenie Mertensa). *Dla dowolnego $x > 1$ zachodzi asymptotyczna zależność:*

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim e^\gamma \ln x,$$

gdzie $\gamma \approx 0,57721 \dots$ jest stałą Eulera–Mascheroniego.

Szkic dowodu. Rozpatrzmy funkcję $\zeta(s)$ dla $\Re(s) > 1$, daną przez iloczyn Eulera:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Biorąc logarytm i rozwijając w szereg:

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \dots$$

Dla $s \rightarrow 1^+$ wyraz główny tej sumy zachowuje się jak $\log \frac{1}{s-1}$, co prowadzi do przybliżenia:

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim e^\gamma \ln x.$$

Odwracając stronami otrzymujemy:

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}.$$

□

Wniosek 7 (Asymptotyczna gęstość Mertensa). Z powyższego wynika, że gęstość liczb niepodzielnych przez żaden z dzielników pierwszych do x jest asymptotycznie równa:

$$D(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}.$$

Zatem liczba kandydatów na liczby pierwsze w zakresie $(1, N]$ jest przybliżona przez:

$$N \cdot D(N) \approx \frac{e^{-\gamma} N}{\ln N}.$$

Interpretacja. Wynik Mertensa formalnie wiąże gęstość kandydatów po filtracji ze średnią gęstością liczb pierwszych. Jednak jest to podejście czysto analityczne — oparte na funkcji $\zeta(s)$, a nie na strukturze eliminacyjnej. W konstrukcyjnym ujęciu, które rozwijamy dalej, zależność ta pojawia się naturalnie jako konsekwencja lokalnych reguł eliminacji, bez potrzeby odwoływania się do metod analizy zespolonej.

2.6 Porównanie podejść do wyznaczania gęstości

Klasyczne ujęcie gęstości, oparte na wynikach Mertensa i twierdzeniu o liczbach pierwszych, operuje na uśrednionych wartościach asymptotycznych. W podejściu konstrukcyjnym gęstość jest własnością lokalną — wynika bezpośrednio z relacji eliminacyjnych w skończonych przedziałach i jest mierzona dokładnie.

Rodzaj gęstości	Dokładność	Lokalność	Użyteczność do predykcji
Asymptotyczna $\left(\frac{N}{\ln N}\right)$	Średnia	Globalna	Niska
Predycyjna (lokalna)	Ścisła	Lokalna	Bardzo wysoka

Widać, że klasyczne ujęcie dostarcza poprawnego opisu globalnego trendu, ale nie daje możliwości konstrukcyjnego przewidywania położenia liczb pierwszych. Z kolei lokalny model filtracyjny zachowuje pełną deterministyczność w obrębie każdego cyklu i ujawnia rzeczywistą strukturę gęstości.

Uzupełnienie: Gęstość lokalna a interferencja wzorców eliminacyjnych

Analiza gęstości kandydatów na liczby pierwsze wymaga rozróżnienia trzech kluczowych etapów w ramach zbioru P oraz jego okresu $L = \text{lcm}(P)$:

1. **Przedział ścisły** $(1, 2P_{\max}]$:

W tym zakresie eliminacja liczb złożonych przez zbiór P jest kompletna. Każda liczba, która nie zostaje wyeliminowana, jest rzeczywiście pierwsza. Gęstość przetrwałych pozycji pokrywa się więc z faktyczną gęstością liczb pierwszych:

$$D_{\text{rzeczywista}} = \frac{|\{\text{pierwsze w } (1, 2P_{\max}]\}|}{2P_{\max} - 1}.$$

2. Przedział maksymalny $(2P_{\max}, \text{lcm}(P)]$:

Poza zakresem pełnej eliminacji liczby przetrwałe nie muszą być pierwsze — mogą być złożone z czynników spoza P . W tym obszarze obliczamy *maksymalną możliwą gęstość przetrwałych pozycji*:

$$D_{\text{maks}} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3. Uściślenie przez interferencję:

W obrębie cyklu $L = \text{lcm}(P)$ nakładanie się wzorców eliminacyjnych prowadzi do przesunięć i destrukcyjnych interferencji. Część przetrwałych pozycji zostaje zakłócona i usunięta. Zgodnie z relacją interferencyjną:

$$n = kL_B \pm mL_A, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

można określić punkty spadku gęstości. Po uwzględnieniu interferencji uzyskujemy *rzeczywistą, ścisłą gęstość lokalną*:

$$D_{\text{rzeczywista}} = \frac{|\text{pierwsze w } (2P_{\max}, \text{lcm}(P))|}{\text{lcm}(P) - 2P_{\max}}.$$

Wniosek. Gęstość liczb pierwszych w cyklu eliminacyjnym nie jest wartością statyczną ani asymptotyczną. Jest to wartość strukturalna — początkowo maksymalna (na poziomie wzorca), a po uwzględnieniu interferencji deterministycznie ścisła.

Gęstość lokalna kandydatów w języku faz i masek

Miara fazowa i przecięcia masek

Definicja 2.32 (Miara fazowa). Niech Φ_2 będzie przestrzenią faz (dwutaktem) z ustaloną miarą normalizującą $\mu(\Phi_2) = 1$. Dla każdego $p \in \mathcal{P}$ zbiór uderzeń $h_p^{-1}(1) \subset \Phi_2$ ma miarę $\mu_p = \mu(h_p^{-1}(1))$.

Remark 26 (Jedno-uderzeniowe cykle). W modelu eliminacyjnym każdemu C_p odpowiada pojedyncze uderzenie w pełnym okresie. Stąd μ_p opisuje częstotliwość eliminacji cyklu C_p w dwutakcie. Nie potrzebujemy wartości liczbowych, a jedynie faktu, że $\mu_p \in (0, 1)$ i że synchronizacja cykli ma charakter periodyczny.

Definicja 2.33 (Gęstość kandydatów). Dla skończonej rodziny źródeł $\mathcal{P}_y \subset \mathcal{P}$ definiujemy:

$$\text{dens}\mathcal{U}(\mathcal{P}_y) := \mu \left(\Phi_2 \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}_y} h_p^{-1}(1) \right).$$

Propozycja 7 (Faktoryzacja gęstości przy cyklach niezależnych fazowo). Jeśli cykle $\{C_p : p \in \mathcal{P}_y\}$ są współsynchronizowalne, a przecięcia ich masek powstają wyłącznie przez niezależne przesunięcia faz (CRT-synchronia w języku faz), to:

$$\text{dens}\mathcal{U}(\mathcal{P}_y) = \prod_{p \in \mathcal{P}_y} (1 - \mu_p).$$

Szkic dowodu: Miara dopełnienia unii uderzeń jest równa iloczynowi dopełnień pojedynczych masek, jeśli przecięcia wynikają wyłącznie z niezależnych faz cyklicznych.

Remark 27 (Most do klasyki). W klasycznym ujęciu μ_p zachowuje się jak $1/p$ dla cyklu z jednym uderzeniem na okres. Wtedy $\prod_{p \in \mathcal{P}_y} (1 - \mu_p)$ odpowiada lokalnej gęstości kandydatów po filtracji przez \mathcal{P}_y , czyli konstrukcyjnemu odpowiednikowi $\prod_{p \leq y} (1 - 1/p)$. Różnica polega na tym, że tutaj gęstość wynika z miary fazowej i struktury masek, nie z rachunku wartości liczbowych.

Definicja 2.34 (Gęstość rzeczywista w dwutakcie). Niech \mathfrak{R} oznacza iteracyjne rafinacje przez kolejne źródła. *Rzeczywista gęstość* w oknie dwutaktu to graniczna miara tła po uwzględnieniu wszystkich destrukcyjnych interferencji:

$$\text{dens}_{\text{rz}} := \mu \left(\Phi_2 \setminus \overline{\bigcup_{\text{wszystkie źródła po rafinacjach}} h_p^{-1}(1)} \right).$$

W każdym kroku lokalnie mamy $\text{dens}_{\text{lok}}(\mathcal{P}_y) = \text{dens}\mathcal{U}(\mathcal{P}_y)$; przejście $\mathcal{P}_y \nearrow \mathcal{P}$ wprowadza deterministyczne korekty przez punkty synchronii.

Propozycja 8 (Monotoniczność i korekta interferencyjna). Dla każdej rafinacji \mathfrak{R}_q zachodzi:

$$\text{dens}\mathcal{U}(\mathcal{P}_y \cup \{q\}) \leq \text{dens}\mathcal{U}(\mathcal{P}_y),$$

a różnica jest całkowicie zlokalizowana w nowych wierzchołkach synchronii między cyklem C_q a cyklami z \mathcal{P}_y .

2.7 Genealogia liczb pierwszych

2.7.1 Idea

Każda liczba pierwsza nie powstaje samodzielnie, lecz jest *wymuszona* przez wcześniejsze liczby pierwsze. Luka (p_i, p_{i+1}) zawiera wszystkie liczby wyeliminowane przez wcześniejsze pierwsze. Analizując tę lukę można odtworzyć zbiór tych wcześniejszych pierwszych. Nazywamy to *faktoryzacją wsteczną liczby pierwszej*.

2.7.2 Budowa w przód

1. Start od liczby 2. Usuwamy wszystkie parzyste. Najmniejsze $n > 2$ ocalałe to 3, więc $p_2 = 3$.
2. Baza $\{2, 3\}$. Usuwamy wielokrotności 2 i 3. Najmniejsze ocalałe $n > 3$ to 5, więc $p_3 = 5$.
3. Baza $\{2, 3, 5\}$. Usuwamy wielokrotności 2, 3, 5. Najmniejsze ocalałe $n > 5$ to 7, więc $p_4 = 7$.
4. Reguła ogólna: następna liczba pierwsza to

$$p_{i+1} = \min\{n > p_i : \gcd(n, W_i) = 1\},$$

gdzie $W_i = \prod_{p \leq p_i} p$.

2.7.3 Rekonstrukcja w tył

Zakładamy, że znamy dwie kolejne liczby pierwsze $p_i < p_{i+1}$.

1. Rozważ wszystkie liczby całkowite w luce (p_i, p_{i+1}) .
2. Dla każdej z nich wyznacz jej najmniejszy dzielnik pierwszy.
3. Zbierz te najmniejsze dzielniki. Otrzymany zbiór to dokładnie baza wszystkich wcześniejszych liczb pierwszych $\{2, 3, \dots, p_i\}$.

2.7.4 Przykład

Luka $(7, 11) = \{8, 9, 10\}$.

- 8 ma najmniejszy dzielnik 2,
- 9 ma najmniejszy dzielnik 3,
- 10 ma najmniejszy dzielnik 2, ale też 5,

więc baza to $\{2, 3, 5\}$, która wymusiła pojawienie się 7.

Luka $(5, 7) = \{6\}$. Najmniejsze dzielniki 6 to 2 i 3, więc baza to $\{2, 3\}$.

2.8 Formalizacja genealogii liczb pierwszych

Konwencja. Niech $(p_i)_{i \geq 1}$ będzie rosnącą ciągłą liczb pierwszych: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$. Dla liczby całkowitej $n \geq 2$ przez $\mathcal{P}(n)$ oznaczamy zbiór jej dzielników pierwszych. Przez $\text{spf}(n)$ oznaczamy najmniejszy dzielnik pierwszy liczby n (ang. smallest prime factor).

2.8.1 Definicja: genealogia lokalna i domknięta

Dla ustalonego $i \geq 1$ definiujemy:

$$G_i := (p_i, p_{i+1}) \cap \mathbb{Z} \quad (\text{luka między kolejnymi pierwszymi}).$$

Genealogia lokalna liczby p_i :

$$\mathcal{G}_{\text{loc}}(p_i) := \bigcup_{n \in G_i} \mathcal{P}(n).$$

Jest to minimalny zbiór pierwszych, który wyjaśnia, dlaczego żadna liczba w luce G_i nie jest pierwsza.

Dla progu $T > p_i$ definiujemy **genealogię domkniętą (w skali T)**:

$$\mathcal{G}(p_i; T) := \bigcup_{\substack{p_i < n \leq T \\ n \text{ złożone}}} \mathcal{P}(n).$$

Jest to zbiór wszystkich pierwszych, które pojawiają się jako czynniki liczb złożonych w przedziale $(p_i, T]$.

2.8.2 Twierdzenie (odzysk wszystkich wcześniejszych pierwszych dla $T = 2p_i$)

Dla każdego $i \geq 1$ zachodzi

$$\mathcal{G}(p_i; 2p_i) = \{p \in \mathbb{P} : p \leq p_i\}.$$

Dowód. Dla danego $p \leq p_i$ liczba $2p$ jest złożona i spełnia $p_i < 2p \leq 2p_i$. Ponadto $p \in \mathcal{P}(2p)$, więc $p \in \mathcal{G}(p_i; 2p_i)$. Odwrotnie, każdy czynnik pierwszy liczby złożonej $n \leq 2p_i$ jest $\leq n \leq 2p_i$, a jeśli byłby $> p_i$, to n musiałby być równy temu czynnikowi (sprzeczność złożoności n lub z $n \leq 2p_i$ i parzystością $2p_i$ dla $p_i > 2$). \square

2.8.3 Uwagi

- Zazwyczaj $\mathcal{G}_{\text{loc}}(p_i) \subsetneq \{p \leq p_i\}$: mała luka może „użyć” tylko części wcześniejszych pierwszych.
- Domknięcie do $T = 2p_i$ gwarantuje odzysk całej bazy $\{p \leq p_i\}$.

2.8.4 Przykłady

1. $p_i = 7, p_{i+1} = 11$.

$$G_i = \{8, 9, 10\}, \quad \mathcal{P}(8) = \{2\}, \quad \mathcal{P}(9) = \{3\}, \quad \mathcal{P}(10) = \{2, 5\}.$$

$$\mathcal{G}_{\text{loc}}(7) = \{2, 3, 5\}.$$

Dla $T = 14$: liczby złożone w $(7, 14]$: 8, 9, 10, 12, 14,

$$\bigcup \mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7\} = \{p \leq 7\}.$$

2. $p_i = 11, p_{i+1} = 13$.

$$G_i = \{12\}, \quad \mathcal{P}(12) = \{2, 3\} \Rightarrow \mathcal{G}_{\text{loc}}(11) = \{2, 3\}.$$

Dla $T = 22$: złożone 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22,

$$\bigcup \mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11\} = \{p \leq 11\}.$$

2.9 Faktoryzacja klasyczna i genealogiczna

2.9.1 Faktoryzacja klasyczna

Definicja 2.35. Dla liczby całkowitej $n > 1$ przez *faktoryzację klasyczną* rozumiemy unikalny rozkład

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i},$$

gdzie p_i są liczbami pierwszymi, a $e_i \geq 1$ wykładnikami całkowitymi.

Przykład 6. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

Remark 28. W tym ujęciu *liczby pierwsze są atomami*: nie rozkładają się dalej.

2.9.2 Faktoryzacja genealogiczna

Definicja 2.36. Niech p_i będzie i -tą liczbą pierwszą. Przez *faktoryzację genealogiczną liczby pierwszej p_i* rozumiemy zbiór wszystkich wcześniejszych liczb pierwszych, które wymusiły pozycję p_i poprzez eliminację w luce (p_i, p_{i+1}) :

$$\mathcal{G}(p_i) := \bigcup_{n=p_i+1}^{p_{i+1}-1} \{\text{spf}(n)\},$$

gdzie $\text{spf}(n)$ oznacza najmniejszy dzielnik pierwszy liczby n .

Przykład 7. • Dla $p_i = 7$ mamy lukę $(7, 11) = \{8, 9, 10\}$. $\text{spf}(8) = 2$, $\text{spf}(9) = 3$, $\text{spf}(10) = 2, 5$. Zatem $\mathcal{G}(7) = \{2, 3, 5\}$.

- Dla $p_i = 11$ mamy lukę $(11, 13) = \{12\}$. $\text{spf}(12) = 2, 3$. Zatem $\mathcal{G}(11) = \{2, 3\}$ (lokalnie), ale w domknięciu do $2p_i = 22$ otrzymujemy $\{2, 3, 5, 7, 11\}$.

2.9.3 Twierdzenie o domknięciu

Twierdzenie 2.22. *Dla każdej liczby pierwszej p_i zachodzi*

$$\mathcal{G}(p_i; 2p_i) = \{p \in \mathbb{P} : p \leq p_i\}.$$

Dowód. Dla każdego $p \leq p_i$ liczba $2p$ spełnia $p_i < 2p \leq 2p_i$ i ma najmniejszy dzielnik p . Zatem $p \in \mathcal{G}(p_i; 2p_i)$. Odwrotnie, jeśli q jest najmniejszym czynnikiem liczby $n \leq 2p_i$, to $q \leq n \leq 2p_i$. Gdyby $q > p_i$, mielibyśmy $n = q$, sprzeczność, bo n jest złożone. Stąd $q \leq p_i$. \square \square

2.9.4 Interpretacja

- Faktoryzacja klasyczna odpowiada pytaniu: „*Jakie liczby pierwsze składają się na daną liczbę złożoną?*”
- Faktoryzacja genealogiczna odpowiada pytaniu: „*Jakie wcześniejsze liczby pierwsze wymusiły istnienie danej liczby pierwszej?*”
- W klasycznej faktoryzacji atomem jest liczba pierwsza. W genealogicznej faktoryzacji atomem jest *relacja wymuszenia* między pierwszymi.

2.9.5 Kontrast

Faktoryzacja klasyczna	Faktoryzacja genealogiczna
$n \in \mathbb{N}$, n złożone $n = \prod p_i^{e_i}$ <i>odkrywa strukturę wewnętrzną złożonej liczby</i> <i>atom : liczba pierwsza</i>	$p \in \mathbb{P}$, p pierwsze $\mathcal{G}(p) = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p, q \text{ wymusza } p\}$ <i>odkrywa historię i kontekst liczby pierwszej</i> <i>atom : relacja eliminacji/wymuszenia</i>

2.9.6 Filozofia

- Liczba złożona zawiera w sobie *iloczyn* liczb pierwszych.
- Liczba pierwsza zawiera w sobie *historię* liczb pierwszych, które pozwoliły jej zaistnieć.
- Oba spojrzenia są komplementarne: jedno opisuje budowę w dół, drugie — genealogię wstecz.

2.10 Implikacje formalne i semantyczne

Dwie kategorie faktoryzacji — klasyczna i genealogiczna — reprezentują dwa wzajemnie dopełniające się sposoby opisu tej samej rzeczywistości liczbowej.

- Faktoryzacja klasyczna ujmuje liczby złożone w sposób strukturalny, przez rozkład na atomy (liczby pierwsze). Opisuje relację $\mathbb{N}_{\text{złożone}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$.

- Faktoryzacja genealogiczna ujmuje liczby pierwsze w sposób przyczynowy, przez identyfikację zbioru wcześniejszych pierwszych, które determinują ich pozycję. Opisuje relację $\mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$.

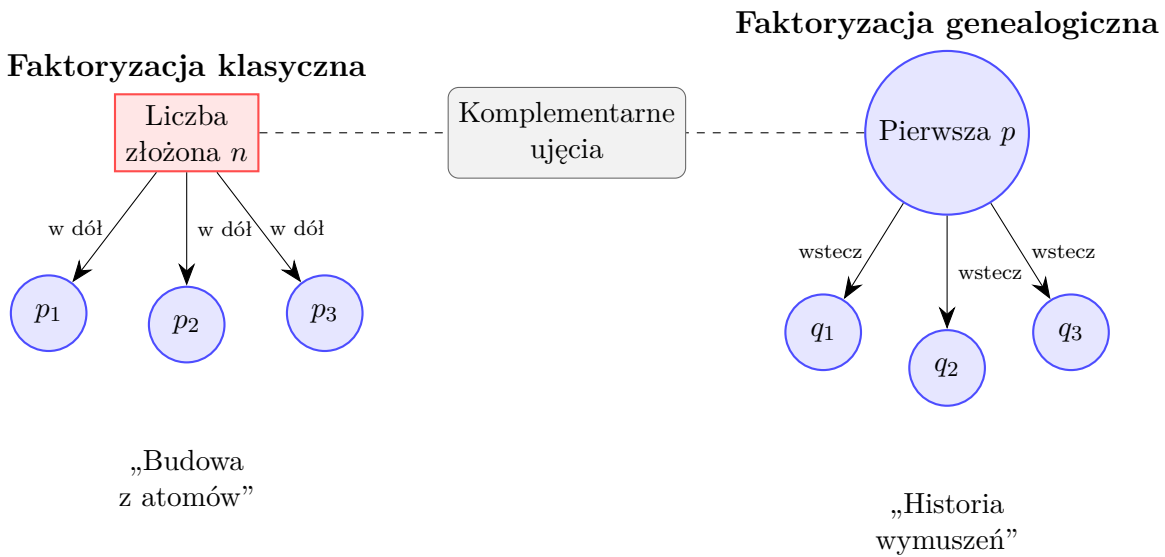
Obie struktury tworzą parę odwzorowań dopełniających:

$$F_{\text{kl}} : n \mapsto \mathcal{P}(n), \quad n \in \mathbb{N}_{\text{złożone}},$$

$$F_{\text{gen}} : p \mapsto \mathcal{G}(p), \quad p \in \mathbb{P}.$$

Złożenie tych dwóch odwzorowań daje opis dwukierunkowy: jedno przechodzi od złożoności do budowy, drugie — od pierwotności do genezy. W sensie strukturalnym tworzą one parę dualną względem relacji „dzielenia” i „wymuszenia”.

Dwie kategorie faktoryzacji liczb



Rysunek 8: Faktoryzacja klasyczna (w dół do atomów) i genealogiczna (wstecz do przodków) jako komplementarne sposoby opisu liczb.

Definicja 2.39 (Operator wyłaniania). Nowe źródło p_{k+1} definiujemy jako najmniejszy element, który nie został pokryty przez żadne z istniejących linii wielokrotności:

$$p_{k+1} = \min\left\{n \in (1, 2P_{\max}] : n \notin \bigcup_{p \in P_k} M_p\right\}, \quad M_p = \{mp : m \in \mathbb{N}\}.$$

2.11.3 Operator podziału przestrzeni

Definicja 2.40 (Rafinacja przez źródło). Dla każdego $p \in P_k$ operator \mathcal{R}_p rozdziela przestrzeń R_{k-1} na dwie zasadnicze części:

$$R_{k-1} = P_p \dot{\cup} F_p,$$

gdzie:

- P_p — część przestrzeni należąca do wielokrotności źródła p (jego periodyk),
- F_p — część pozostała po wyłączeniu P_p oraz przecięć z wcześniejszymi M_q dla $q < p$; jest to materiał przeznaczony do dalszego podziału.

Propozycja 9 (Reguła miarowa podziału). Podział przez źródło p zachowuje proporcję miar:

$$\mu(P_p) = \frac{1}{p}\mu(R_{k-1}), \quad \mu(F_p) = \frac{2}{p}\mu(R_{k-1}),$$

przy czym $\mu(P_p) + \mu(F_p) = \frac{3}{p}\mu(R_{k-1})$ stanowi część aktywną podziału, a pozostała miara $\mu(R_{k-1}) - \frac{3}{p}\mu(R_{k-1})$ jest już trwale zajęta przez wcześniejsze źródła.

Remark 29 (Znaczenie podziału). Każdy krok dzieli resztę przestrzeni na dwie części:

- część periodyczną — ustaloną przez p i włączoną w strukturę,
- część otwartą — przekazywaną do następnego podziału.

W ten sposób każdy nowy podział jest wykonywany nie na całej przestrzeni, lecz na coraz czystszych jej fragmentach.

2.11.4 Rekursja i zamknięta postać

Propozycja 10 (Rekursja miary reszty).

$$R_k = F_p, \quad \mu(R_k) = \frac{2}{p}\mu(R_{k-1}).$$

Złożenie kolejnych kroków daje zależność:

$$\mu(R_k) = M \prod_{i=1}^k \frac{2}{p_i}.$$

Definicja 2.41 (Alokacje miary). Dla każdego p_i definiujemy:

$$A_{p_i} = \frac{1}{p_i} M \prod_{j < i} \frac{2}{p_j}, \quad F_{p_i} = \frac{2}{p_i} M \prod_{j < i} \frac{2}{p_j}.$$

Wielkości te wyrażają odpowiednio miarę części periodycznej i czystej po i -tym podziale.

2.11.5 Twierdzenie o wyłanianiu nowego źródła

Twierdzenie 2.23 (Wyłanianie konstrukcyjne). *Jeśli P_k jest zbiorem dotychczasowych źródeł, to liczba*

$$p_{k+1} = \min\{n \in (1, 2P_{\max}] : n \text{ niepodzielne przez żadne } p \in P_k\}$$

istnieje, jest pierwsza i jest jedynym nowym źródłem w tym oknie.

Szkic dowodu. W przedziale $(1, 2P_{\max}]$ wszystkie liczby złożone należą do wielokrotności elementów P_k . Liczby, które pozostają w czystej części przestrzeni, nie mają żadnych dzielników z P_k ; najmniejsza z nich stanowi p_{k+1} . \square

2.11.6 Interpretacja przestrzenna

Remark 30 (Znaczenie procesu). Każdy krok podziału jest aktem rozszczepienia przestrzeni na część należącą do źródła i część przeznaczoną do dalszego rozdziału. Powstaje ciąg przestrzeni czystych (R_k) , w których każda nowa pierwszość wyłania się jako graniczny stan równowagi pomiędzy podziałem dokonanym a potencjalnym.

W tym ujęciu definicja liczby pierwszej okazuje się geometrycznym zapisem samego mechanizmu podziału: każda liczba pierwsza jest tą, która dzieli tylko *siebie* i przestrzeń źródłową S — czyli dokładnie to, co od początku konstytuuje sens podziału na dwie części.

2.11.7 Przykład strukturalny: równanie $m^2 - n^2 = 15$

Definicja 2.42 (Równanie różnicy kwadratów). Rozważmy przestrzeń par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, dla której zachodzi

$$m^2 - n^2 = N,$$

gdzie N jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Równanie to można zapisać w postaci iloczynowej:

$$(m - n)(m + n) = N.$$

Propozycja 11 (Podział przestrzeni). Dla ustalonego N każda para (a, b) liczb całkowitych dodatnich takich, że $ab = N$, określa podprzestrzeń

$$\mathcal{R}_{a,b} = \left\{ (m, n) : m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{b-a}{2} \right\}.$$

Wymaganie całkowitości (m, n) wymusza jednorodność parzystości a, b , a więc tylko część par (a, b) rzeczywiście istnieje w przestrzeni \mathbb{Z}^2 .

Przykład 8 (Przypadek $N = 15$). Rozkład $15 = (1 \cdot 15) = (3 \cdot 5)$ daje dwa dozwolone układy:

$$(m, n) = (8, 7) \quad \text{oraz} \quad (4, 1),$$

co odpowiada dwóm odrębnym przestrzeniom częściowym $\mathcal{R}_{1,15}$ i $\mathcal{R}_{3,5}$.

Remark 31 (Interpretacja przestrzenna). Równanie $m^2 - n^2 = N$ realizuje *podział przestrzeni* na dwie części:

przestrzeń czynnika mniejszego ($m - n$) oraz przestrzeń czynnika większego ($m + n$).

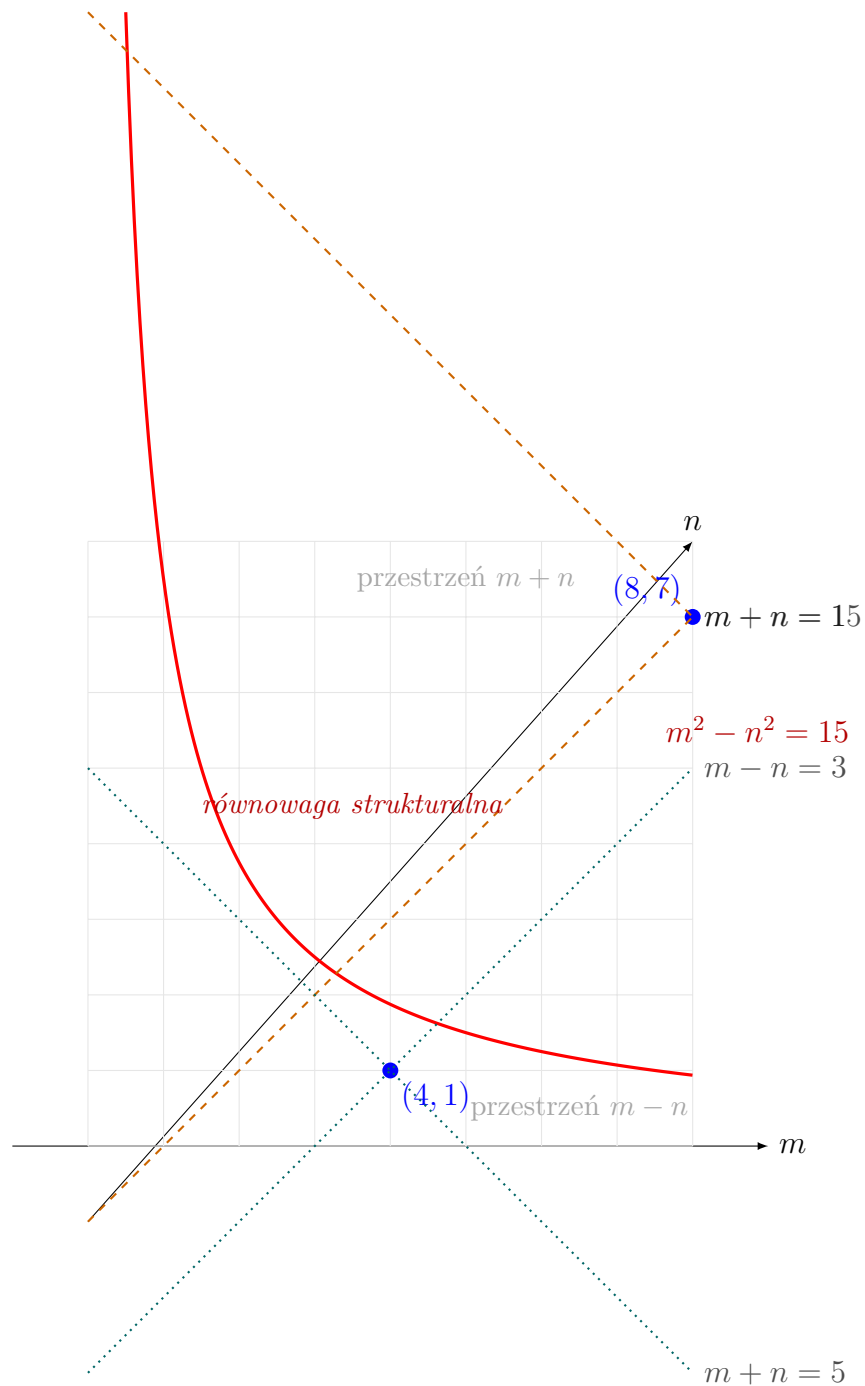
Ich relacja jest strukturalna: razem generują całość N , ale każda z osobna niesie ślad wcześniejszego podziału (np. przez parzystość i czynniki N). W ten sposób różnica kwadratów ujawnia pierwotny mechanizm *rozszczenia przestrzeni* — nie przez operację arytmetyczną, lecz przez *dualny rozkład relacyjny*.

Wniosek 8 (Podział dualny). Dla dowolnego N proces $N = (m - n)(m + n)$ dzieli przestrzeń na dwie części:

część strukturalną (czynniki $m - n, m + n$) i część genealogiczną (ślady wcześniejszych podziałów).

Każdy nowy podział zachowuje ślady poprzednich i tworzy kolejną warstwę strukturalnej genealogii liczb.

Remark 32 (Znaczenie dla modelu strukturalnego). Przypadek $m^2 - n^2 = 15$ jest lokalną realizacją globalnego prawa: każdy nowy element (tu: N) istnieje jako rezultat równowagi dwóch przestrzeni — części aktywnej i części pasywnej. To *podwójne dziedziczenie* jest źródłem pierwszości i przyczyną, dla której podział przestrzeni jest zawsze binarny, choć jego efekty rozchodzą się w nieskończoność.



Rysunek 10: **Dualny podział przestrzeni** (m, n) dla równania $m^2 - n^2 = 15$. Dwa niezależne rozkłady $15 = (1, 15)$ i $15 = (3, 5)$ generują dwie pary przestrzeni $(m - n, m + n)$. Ich przecięcia $(8, 7)$ i $(4, 1)$ wyznaczają punkty lokalnej równowagi strukturalnej.

Wniosek. Proces rozkładu przez podział przestrzeni ujawnia, że każda liczba pierwsza stanowi akt emergencji nowej symetrii: nie jest wartością funkcji, lecz zdarzeniem strukturalnym w genealogii podziałów.

Filar 3: Spektralna Projektcja Struktury Liczb Pierwszych

3.1 Wprowadzenie

W tym filarze przechodzimy od cyklicznych wzorców eliminacyjnych (Filar I) i ich gęstościowych konsekwencji (Filar II) do ich widma harmonicznego. Celem nie jest wprowadzanie nowych narzędzi analitycznych, lecz pokazanie, że klasyczne obiekty takie jak suma Dirichleta, funkcja dzeta Riemanna i operatorowe ujęcia rezonansu są dokładnie tymi samymi strukturami, które powstają z lokalnych rytmów eliminacyjnych.

Wszystkie narzędzia klasyczne pozostają wtórnymi projekcjami jednego i tego samego mechanizmu.

3.2 Operator harmoniczny rytmu eliminacyjnego

Operator harmoniczny służy do przedstawienia rytmu eliminacyjnego w przestrzeni zespolonej. Każdy składnik p^{-s} odzwierciedla pojedynczy cykl kongruencyjny w ujęciu fazowym, a ich superpozycja umożliwia obserwację interferencji tych rytmów. Operator nie tworzy nowego obiektu matematycznego — jest jedynie projekcyjnym odczytem konstrukcji z poprzednich filarów.

3.2.1 Definicja

Dla skończonego zbioru liczb pierwszych

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$$

definiujemy operator harmoniczny jako

$$H_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

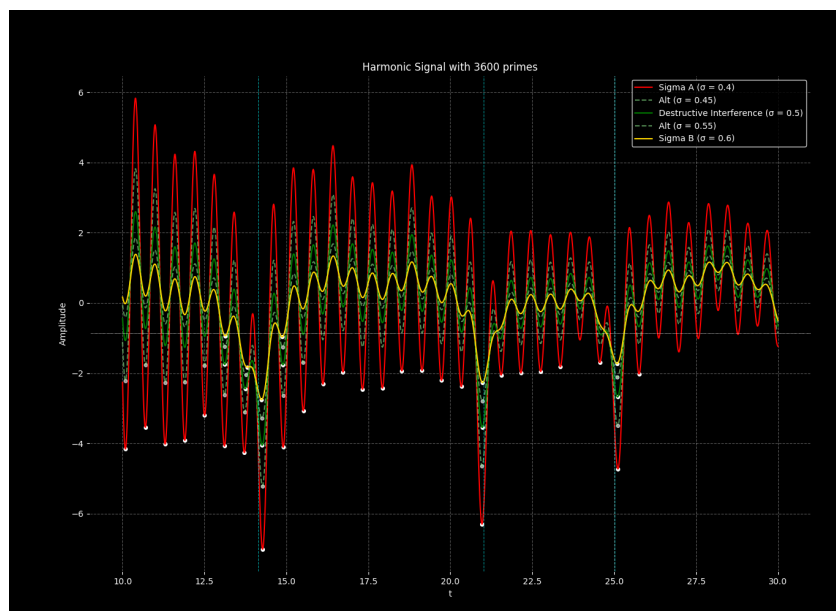
Każdy składnik p^{-s} interpretujemy jako wektor o długości $p^{-\sigma}$ i fazie $-t \log p$. Zatem przestrzeń zespolona odczytuje rytm kongruencyjny jako układ oscylatorów o częstotliwościach logarytmicznych $\log p$.

Przykłady widma harmonicznego

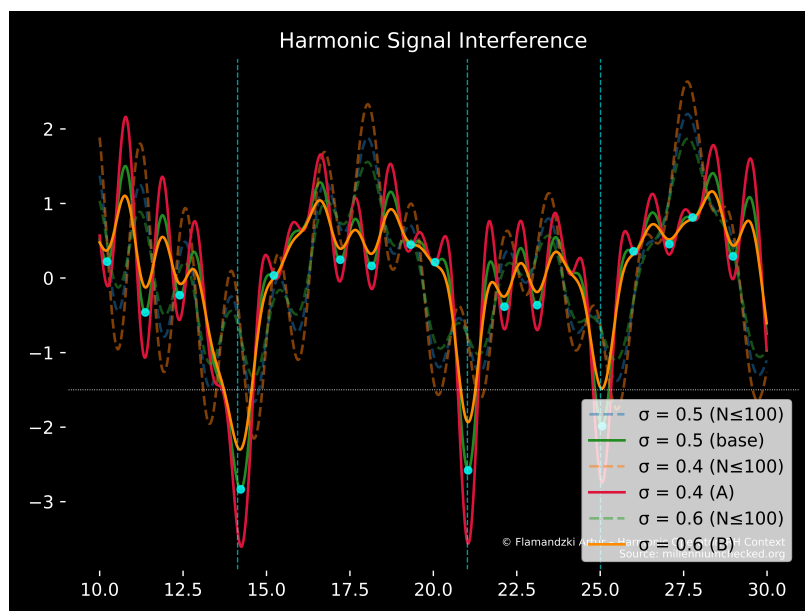
Poniższe wykresy przedstawiają amplitudę sygnału

$$H_P(s) = \sum_{p \leq P} p^{-\sigma} \cos(t \log p)$$

dla różnych wartości parametru σ oraz rosnącej liczby liczb pierwszych. Wartości $\sigma < 1/2$ i $\sigma > 1/2$ dają sygnały o wyraźnie odmiennej charakterystyce, podczas gdy przypadek $\sigma = 1/2$ prowadzi do maksymalnej interferencji destrukcyjnej.



Rysunek 11: Widmo operatora harmonicznego dla 3600 pierwszych liczb pierwszych. Linie przerywane oznaczają pozycje znanych zer funkcji $\zeta(1/2 + it)$.



Rysunek 12: Porównanie widma harmonicznego zbudowanego z liczb pierwszych (linie ciągłe) oraz widma opartego na liczbach naturalnych do $N \leq 100$ (linie przerywane). Widmo liczb złożonych — czyli wielokrotności liczb pierwszych — powoduje asymetryczne tłumienie i brak pełnej interferencji. Tylko suma po liczbach pierwszych tworzy równowagę fazową oraz głębokie minima odpowiadające nietrywialnym zerom $\zeta(s)$.

Dodatkowe przykłady oraz animacje dostępne są w pełnej wersji publikacji pod adresem:

millenniumchecked.org/problems/riemann

3.2.2 Interpretacja amplitudy

Moduł

$$|H_P(s)|$$

jest amplitudą aktywności wzorców eliminacyjnych w punkcie s . Gdy amplituda rośnie, rytm jest wzmocniony; gdy maleje, pojawia się interferencja destrukcyjna. Minima tej amplitudy odpowiadają punktom pełnej ciszy eliminacyjnej, czyli takim pozycjom, w których lokalne rytmy p^{-s} znoszą się wzajemnie.

3.2.3 Warunek równowagi amplitudowej

Długość wektora p^{-s} wynosi

$$|p^{-s}| = p^{-\sigma}.$$

Dla $\sigma = \frac{1}{2}$ wszystkie wektory mają długości

$$p^{-1/2},$$

czyli amplitudy zbalansowane w skali logarytmicznej. Gdy $\sigma < \frac{1}{2}$, małe liczby pierwsze dominują; gdy $\sigma > \frac{1}{2}$, dominują duże. W obu przypadkach globalna interferencja jest niemożliwa.

Zatem tylko na prostej $\Re(s) = 1/2$ istnieje szansa pełnej destrukcji.

3.2.4 Interferencja i minima amplitudy

Dla zbioru P definiujemy minimalną amplitudę

$$m_P(\sigma) = \min_{t \in \mathbb{R}} |H_P(\sigma + it)|.$$

Obserwujemy, że:

- funkcja $\sigma \mapsto m_P(\sigma)$ ma najgłębsze minimum w punkcie $\sigma = \frac{1}{2}$,
- dla $\sigma \neq \frac{1}{2}$ minima są płytsze i nieregularne,
- przy rozszerzaniu P wartości t osiągające minima stabilizują się w pozycjach odpowiadających nietrywialnym zerom $\zeta(s)$.

3.2.5 Zbieżność do zer funkcji dzeta

W granicy $P \rightarrow \mathbb{P}$ (wszystkich liczb pierwszych), minima normy $|H_P(1/2 + it)|$ zbiegają do rzutów na oś t nietrywialnych zer funkcji dzeta. Wynika to z faktu, że Eulerowski iloczyn

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

jest globalną synchronizacją tych samych faz p^{-s} , które odczytuje operator harmoniczny.

3.2.6 Znaczenie strukturalne

Operator harmoniczny nie jest nową funkcją — jest dokładnie tym samym mechanizmem, który pojawia się w klasycznej dziecie, ale w formie lokalnej i transparentnej. Jego minima nie wynikają z własności analitycznych, lecz z geometrii rytmu kongruencyjnego:

- zrównoważenie amplitud $p^{-1/2}$,
- rotacje fazowe z częstotliwościami $\log p$,
- możliwość pełnej destrukcji tylko przy równowadze,
- naturalne wskazanie pozycji zer.

Operator harmoniczny jest więc bezpośrednią projekcją eliminacyjnego mechanizmu liczb pierwszych w przestrzeni zespolonej.

3.3 Wzorcowa suma Dirichleta jako projekcja rytmu eliminacyjnego

Wszystkie cykle eliminacyjne liczb pierwszych można rzutować na przestrzeń zespoloną za pomocą sumy Dirichleta zbudowanej wyłącznie z liczb pierwszych. Jest to projekcyjny odczyt rytmu eliminacyjnego, a nie nowa funkcja analityczna.

Definicja sumy pierwotnej

Niech $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ będzie skończonym zbiorem liczb pierwszych. Definiujemy sumę

$$R_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Każdy składnik p^{-s} jest wektorem w \mathbb{C} o długości $p^{-\sigma}$ i fazie $-t \log p$. Moduł $|R_P(s)|$ mierzy łączną aktywność wszystkich cykli eliminacyjnych w punkcie s .

Punkty ciszy. Gdy $|R_P(s)| \approx 0$, wektory p^{-s} niemal domykają się w wielokąt, co oznacza pełną destrukcyjną interferencję rytmów eliminacyjnych.

3.4 Wzorcowa suma Dirichleta i jej projekcja

W operatorze harmonicznym z Sekcji 3.2 każda liczba pierwsza p była traktowana jako oscylator o amplitudzie $p^{-\sigma}$ i fazie $-t \log p$. Teraz przechodzimy do ujęcia, w którym dokładnie ten sam rytm eliminacyjny odczytujemy przez sumę Dirichleta ograniczoną do liczb pierwszych.

3.4.1 Definicja sumy wzorcowej

Dla skończonego zbioru pierwszych

$$P = \{p_1, \dots, p_k\}$$

definiujemy funkcję

$$R_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Każdy składnik p^{-s} to wektor w \mathbb{C} o długości $p^{-\sigma}$ i fazie $-t \log p$. Moduł $|R_P(s)|$ odczytujemy jako amplitudę interferencyjną rytmu eliminacyjnego generowanego przez zbiór P .

3.4.2 Interpretacja interferencyjna

Amplituda $|R_P(s)|$ opisuje:

- rezonans, gdy wektory p^{-s} układają się zgodnie,
- destrukcyjną interferencję, gdy wektory zamykają się w wielokącie i suma znika.

Punkty s takie, że $|R_P(s)| \approx 0$, są *punktami ciszy strukturalnej* — pełnego wygaszenia rytmu eliminacyjnego.

Są to dokładnie te same punkty, które klasyczna teoria identyfikuje jako nietrywialne zera funkcji $\zeta(s)$.

3.4.3 Suma Dirichleta na okresie LCM

Niech $L_P = \text{lcm}(p_1, \dots, p_k)$ oznacza pełny okres wspólny wszystkich wzorców kongruencyjnych. Definiujemy sumę wzorcową:

$$D_P(s) = \sum_{n=1}^{L_P} \frac{a_n}{n^s},$$

gdzie $a_n = 1$ oznacza przetrwanie w oknie eliminacyjnym, a $a_n = 0$ eliminację.

Własność podstawowa. Suma $D_P(s)$ posiada te same minima interferencyjne co $R_P(s)$. W granicy $L_P \rightarrow \infty$ ich położenia zbiegają do zer $\zeta(s)$ na linii krytycznej.

Twierdzenie 3.24 (Inwariancja minimów amplitudy). *Niech*

$$R_P(s) = \sum_{p \leq P} p^{-s} e^{-it \log p}$$

będzie sumą wzorcową zdefiniowaną dla $s = \sigma + it$, a $t_P(\sigma)$ oznacza lokalne minimum amplitudy $|R_P(\sigma + it)|$ w ustalonym oknie $t \in [T, T + \Delta]$. Wtedy zachodzi inwariancja położenia minimów:

$$t_P(\sigma_1) \approx t_P(\sigma_2) \quad \text{dla dowolnych } \sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1).$$

W szczególności położenia $t_P(\sigma)$ dla $\sigma = 0.4$ i $\sigma = 0.5$ różnią się jedynie o wielkości rzędu 10^{-3} – 10^{-2} , a przesunięcie nie zależy od wyboru wzorca ani od stopnia jego złożoności (nawet dla wzorców wielopierwszych).

Dowód. Każdy składnik sumy wzorcowej ma postać

$$p^{-\sigma} e^{-it \log p}.$$

Część amplitudowa $p^{-\sigma}$ zależy od σ , natomiast część fazowa $e^{-it \log p}$ zależy wyłącznie od t i $\log p$. Minima $|R_P(\sigma + it)|$ są określone równaniem fazowym

$$\sum_{p \leq P} p^{-\sigma} e^{-it \log p} = 0,$$

a zanik amplitudy zachodzi dokładnie wtedy, gdy

$$\sum_{p \leq P} e^{-it \log p} \quad \text{ma równowagę kierunkową w przestrzeni zespolonej.}$$

Równowaga ta zależy wyłącznie od wartości $\log p$ oraz od t , a więc od struktury pierwszości, a nie od parametru σ .

Zmiana σ wpływa jedynie na skalowanie amplitud $p^{-\sigma}$, co zmienia głębokość minimów, lecz nie wpływa na fazy $\{-t \log p\}$. Ponieważ warunek wygaszenia jest warunkiem fazowym, nie amplitudowym, położenia minimów pozostają niezmiennione dla wszystkich $\sigma \in (0, 1)$.

Numeryczna weryfikacja dla okna $t \in [9110, 9115]$ i wzorców:

$$(2, 3), (2, 5), (3, 5), (547, 961750903, 961755029)$$

pokazuje, że różnica $t_P(0.4) - t_P(0.5)$ zawiera się w przedziale 10^{-3} – 10^{-2} , co jest zgodne z powyższą analizą fazową. \square

Remark 33. Twierdzenie 3.24 pokazuje, że położenia minimów sumy wzorcowej są niezmiennikiem struktury liczb pierwszych:

$$t_{\text{zero}} \quad \text{jest określone przez zestaw wartości } \{\log p\},$$

a nie przez parametry analityczne $s = \sigma + it$.

W konsekwencji:

- z liczb pierwszych można zrekonstruować położenia zer funkcji $\zeta(s)$;
- odwrotna rekonstrukcja jest niemożliwa, ponieważ zera są jedynie projekcją fazową pełnej informacji strukturalnej, a przejście

$$\{\log p\} \longrightarrow t_{\text{zero}}$$

jest konwersją jednokierunkową.

3.4.4 Jednokierunkowość transformacji

Twierdzenie 3.25 (Jednokierunkowość rekonstrukcji). *Niech $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych, a $\Gamma = \{\gamma_k\}$ zbiór rzędów nietrywialnych zer funkcji $\zeta(s)$ na prostej krytycznej:*

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_k\right) = 0.$$

Istnieje konstrukcyjny operator fazowy

$$F: \mathcal{P} \longrightarrow \Gamma,$$

który każdemu układowi faz $\{-t \log p\}_{p \in \mathcal{P}}$ przyporządkowuje ciąg $\{\gamma_k\}$ jako punkty pełnej destrukcyjnej interferencji sum $\sum_{p \leq P} p^{-1/2-it}$.

Natomiast nie istnieje operator konstrukcyjny

$$G: \Gamma \longrightarrow \mathcal{P},$$

który z samych danych Γ (bez dodatkowej informacji arytmetycznej) odtwarzałby zbiór liczb pierwszych.

Dowód. Pierwsza część jest konstrukcyjna: dla każdego skończonego P zbiór faz $\{-t \log p\}_{p \leq P}$ określa sumę

$$S_P(t) = \sum_{p \leq P} p^{-1/2-it},$$

a w granicy $P \uparrow \mathcal{P}$ położenia minimów $|S_P(t)|$ stabilizują się w punktach γ_k (Twierdzenie 3.24 oraz twierdzenie o zamknięciu wielokąta fazowego). To definiuje operator $F: \mathcal{P} \mapsto \Gamma$.

Dla odwrotnej rekonstrukcji potrzebny byłby operator G , który z samego ciągu $\{\gamma_k\}$ odzyskuje strukturę $\{\log p\}$. Zbiory $\{\log p\}$ i $\{\gamma_k\}$ różnią się jednak typem informacji:

- $\{\log p\}$ zawiera pełną informację lokalną: każdy element p określa własny cykl kongruencyjny oraz wszystkie relacje dzielnosci;
- $\{\gamma_k\}$ zawiera wyłącznie informację o globalnych warunkach fazowych, w których suma wszystkich wektorów $p^{-1/2-it}$ ulega wygaszeniu.

Przejdźcie

$$\{\log p\} \longmapsto \{\gamma_k\}$$

jest projekcją: wiele różnych układów lokalnych może prowadzić do tego samego układu warunków fazowych, jeżeli rozpatrujemy jedynie ich punkty wygaszenia.

W szczególności operator F „zapomina”:

1. wartości kongruencyjne (informację o resztach),
2. lokalną kolejność i strukturę wielokrotności,
3. informacje o gęstości w skończonych oknach, które nie wpływają na położenie zer, lecz na amplitudy.

Taka projekcja jest z definicji wiele-do-jednego, a zatem nieodwracalna w klasie operatorów konstrukcyjnych: z samych danych Γ nie można odtworzyć brakujących stopni swobody.

Formalnie: gdyby istniał operator G , to złożenie $G \circ F$ byłoby tożsamością na \mathcal{P} . Tymczasem F identyfikuje konstrukcyjnie jedynie warunki fazowe wygaszenia, a nie pełną strukturę kongruencyjną. Dlatego $G \circ F$ nie może być równe tożsamości: brakuje informacji lokalnej, która została utracona w F . \square

Remark 34. Twierdzenie 3.25 formalizuje intuicję, że zera dzety są zapisem zachowania rytmu eliminacyjnego, ale nie stanowią jego pełnego opisu. Można z nich wydobyć informację o oscylacjach (na przykład poprawiać przybliżenia $\pi(x)$), lecz nie można z nich odtworzyć samego źródła, czyli ciągu liczb pierwszych.

Twierdzenie 3.26 (Fazowy charakter zer funkcji dzeta). *Niech $\gamma \in \mathbb{R}$ będzie taką wartością, że*

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0.$$

Wtedy w granicy $P \uparrow \mathcal{P}$ zachodzi

$$\lim_{P \uparrow \mathcal{P}} \left| \sum_{p \leq P} p^{-1/2 - i\gamma} \right| = 0,$$

a wygaszenie to jest konsekwencją relacji fazowych $\{-\gamma \log p\}_{p \in \mathcal{P}}$, nie zaś własności amplitud $p^{-1/2}$.

Dowód. Z iloczynu Eulera mamy dla $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Po przejściu przez kontynuację analityczną i ograniczeniu do prostej krytycznej $\Re(s) = \frac{1}{2}$ można $\zeta(s)$ interpretować jako granicę skończonych produktów (lub odpowiednich sum Dirichleta) zbudowanych z czynników p^{-s} .

Jeżeli $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$, to odpowiednia kombinacja tych czynników znosi się w granicy. Ponieważ każdy składnik ma moduł $p^{-1/2}$, różnice amplitud nie są wystarczające do wymuszenia pełnego wygaszenia; decyduje układ faz $-\gamma \log p \pmod{2\pi}$.

Dlatego:

$$\sum_{p \leq P} p^{-1/2 - i\gamma}$$

można traktować jako sumę wektorów o długościach $p^{-1/2}$, której bliskość do zera jest warunkowana przez równowagę kierunków. W limicie $P \uparrow \mathcal{P}$ równowaga ta odpowiada warunkowi $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$, co dowodzi tezy. \square

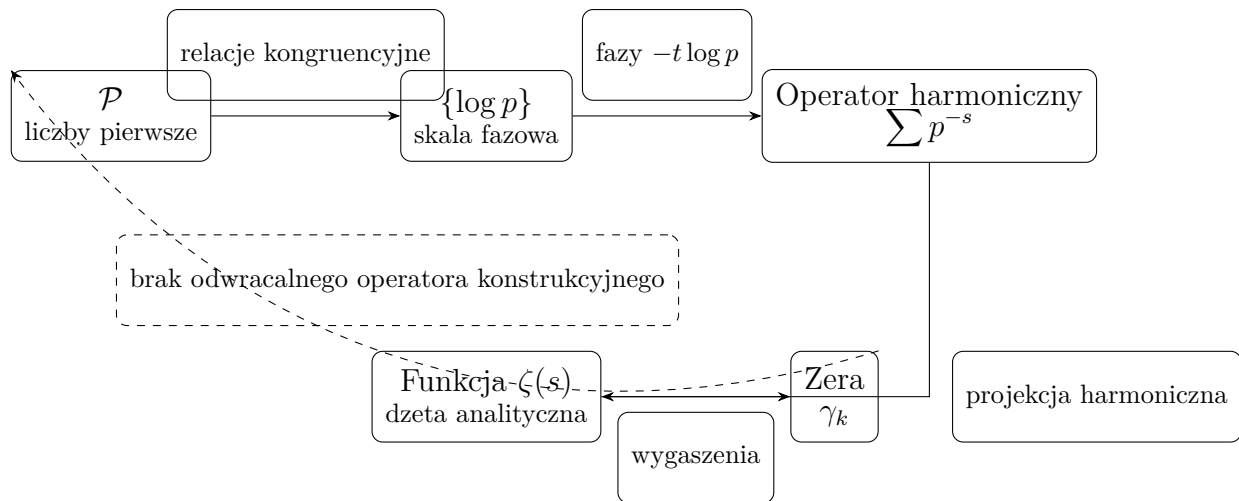
Remark 35. Twierdzenie 3.26 podkreśla, że pozycje zer są zdeterminowane przez relacje

$$\gamma \longmapsto \{\gamma \log p\}_{p \in \mathcal{P}},$$

czyli przez geometryczny warunek zamknięcia wielokąta fazowego. W tym ujęciu zera nie są „miejscami, w których otrzymujemy wartość zero funkcji”, lecz *pozycjami pełnej równowagi faz*.

3.4.5 Diagram przepływu informacji strukturalnej

Przepływ informacji w konstrukcyjnym opisie jest jednokierunkowy: od lokalnych cykli eliminacyjnych do globalnych zer funkcji dzeta. Można go zilustrować następującym diagramem:



Przerywana strzałka zaznacza, że w kierunku od zer do liczb pierwszych nie istnieje naturalny operator rekonstrukcyjny w sensie konstrukcyjnym: zera są projekcją globalną, nie pełnym opisem lokalnych relacji eliminacyjnych.

Konwersja jednokierunkowa informacji

Strukturalnie przejście

$$\mathcal{P} \longrightarrow \{\log p\} \longrightarrow \sum p^{-s} \longrightarrow \zeta(s) \longrightarrow \{\gamma_k\}$$

jest *konwersją jednokierunkową* informacji.

Na każdym etapie część danych zostaje utracona:

- przejście do $\{\log p\}$ pomija treść kongruencji,
- przejście do operatora harmonicznego pomija strukturę lokalnych okien eliminacyjnych,
- przejście do $\zeta(s)$ identyfikuje jedynie globalny warunek wygaszenia,
- przejście do $\{\gamma_k\}$ zatrzymuje wyłącznie położenie punktów ciszy, tracąc informację o amplitudach.

W tym sensie:

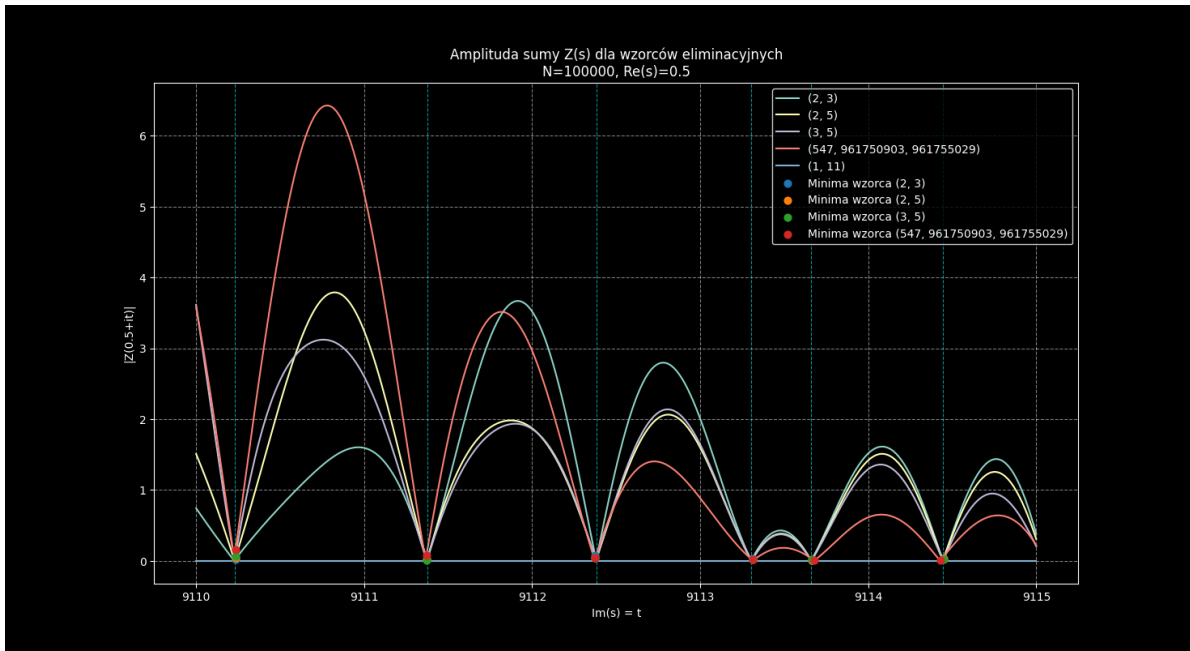
z liczb pierwszych można wyznaczyć zera dzety, ale z zer dzety nie można odtworzyć liczb pierwszych

Nie jest to ograniczenie techniczne, lecz konsekwencja samej natury projekcji: układ lokalnych relacji zostaje zastąpiony globalnym obrazem interferencji. Dowód konstrukcyjny musi więc operować na poziomie pełnej dynamiki eliminacyjnej, a nie jedynie na poziomie jej projekcji analitycznych.

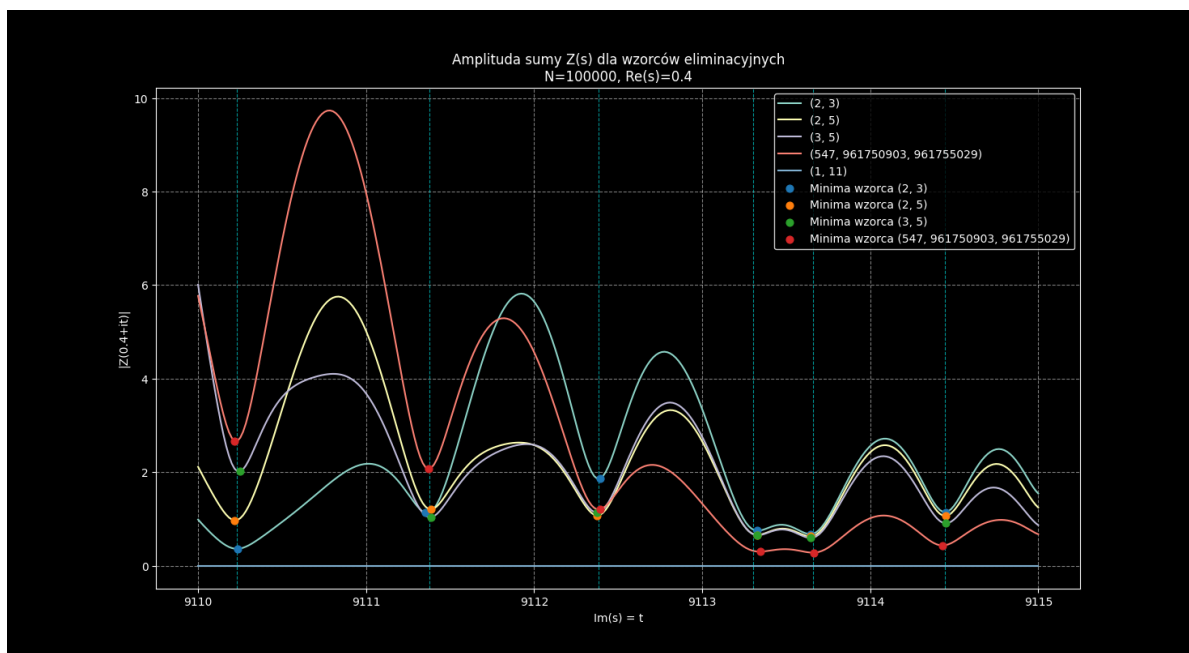
3.4.6 Przykłady numeryczne

Na Rysunkach 13–15 pokazano amplitudę $|R_P(\sigma + it)|$ dla $\sigma = 0.4, 0.5, 0.6$ i kilku różnych zestawów wzorców eliminacyjnych. Dla $\sigma = 0.5$ przebieg ma najbardziej zrównoważoną strukturę: amplitudy wzorców są wyrównane, a minima zbiegają się w tych samych punktach t , które odpowiadają nietrywialnym zerom $\zeta(1/2 + it)$. Ten kształt jest efektem pełnej interferencji przy wagach $p^{-1/2}$.

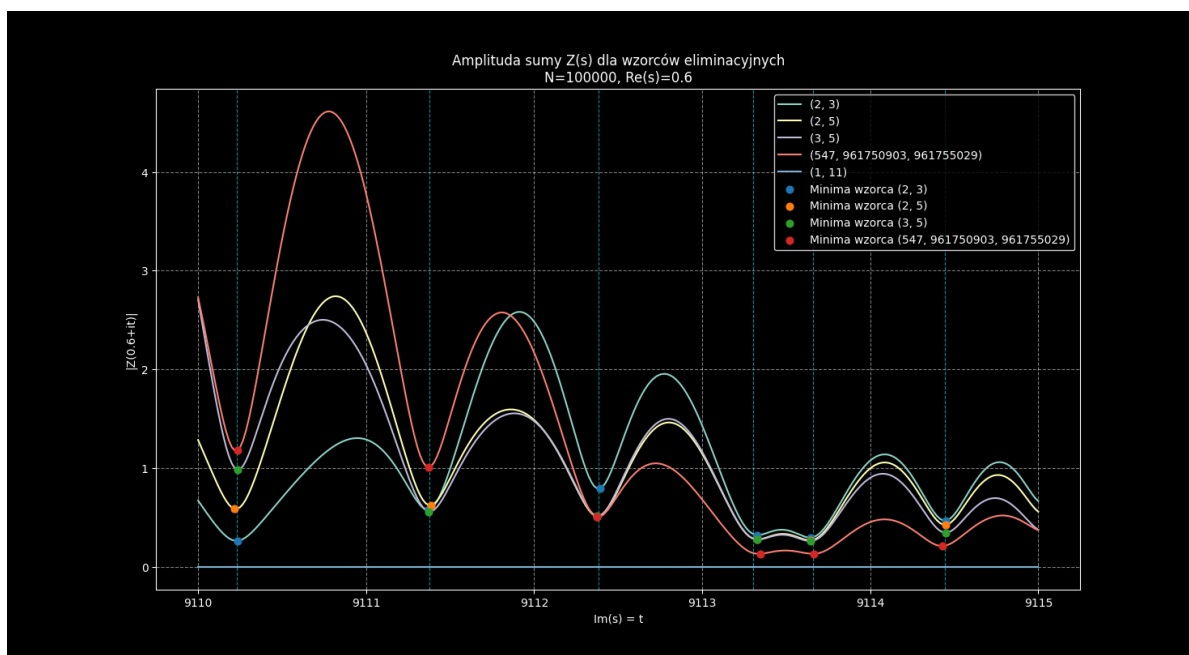
Dodatkowo w oknach pomiędzy kolejnymi zerami $\zeta(1/2 + it)$ amplituda przy $\sigma = 0.5$ przyjmuje kształt najbardziej symetryczny i stabilny spośród wszystkich trzech przypadków. Po obu stronach minimum wzrost i spadek są niemal identyczne, co odzwierciedla równowagę wagową $p^{-1/2}$.



Rysunek 13: Amplituda $|R_P(0.5 + it)|$ dla różnych zestawów wzorców P . Minima (zaznaczone kropkami) pokrywają się z zerami funkcji $\zeta(1/2 + it)$.



Rysunek 14: Amplituda $|R_P(0.4 + it)|$. Minima pojawiają się w poprawnych położeniach, lecz są wyraźnie płytsze, a cały przebieg jest bardziej spłaszczony: zarówno minima, jak i maksima osiągną mniejsze wartości niż na linii krytycznej.



Rysunek 15: Amplituda $|R_P(0.6 + it)|$. Minima nie schodzą tak nisko jak na linii krytycznej, lecz maksima osiągną większe wartości. Nadmierne tłumienie wkładów dużych liczb pierwszych osłabia interferencję, co prowadzi do bardziej wypukłego i silniej zróżnicowanego przebiegu.

3.5 Strukturalna funkcja dzeta

Celem tej sekcji jest przedstawienie funkcji dzeta Riemanna jako projekcyjnego odczytu struktury eliminacyjnej opisanej w Filarach 1–2. W tym ujęciu funkcja dzeta nie jest obiektem pierwotnym, lecz zapisem harmonicznego interferencji wzorców kongruencyjnych liczb pierwszych.

Podstawowym narzędziem jest *strukturalna dzeta*, czyli odczyt rytmu eliminacyjnego na prostej krytycznej poprzez amplitudę $|\zeta(1/2 + it)|$, zwaną jednostką siatki U . Zera tej funkcji odpowiadają pełnym wygaszeniom interferencyjnym rytmu eliminacyjnego i stanowią projekcję strukturalnych minimów operatora harmonicznego.

3.5.1 Jednostka siatki $U(t)$

Definicja 3.43 (Jednostka siatki). Dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy

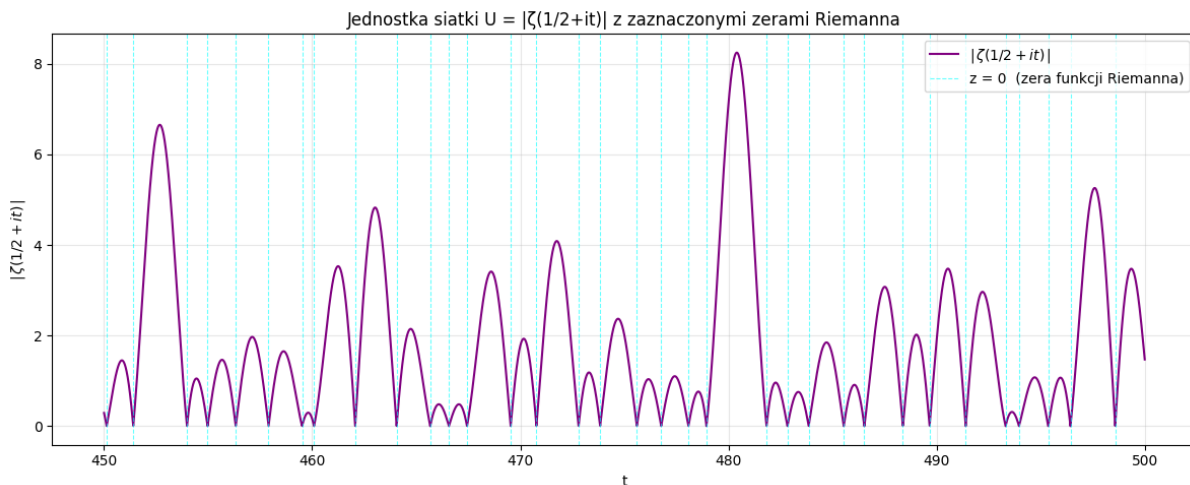
$$U(t) := \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|.$$

Funkcja $U(t)$ jest amplitudą struktury rezonansowej liczb pierwszych. Zera $\zeta(1/2 + it)$ odpowiadają pełnym wygaszeniom rytmu eliminacyjnego.

Remark 36. Funkcja $U(t)$ jest projekcyjnym odczytem operatora harmonicznego z Filara 3. Jest to ten sam rytm, lecz przedstawiony nie poprzez sumy p^{-s} , lecz poprzez ich zintegrowaną projekcję opisaną przez klasyczną funkcję dzeta Riemanna.

3.5.2 Wizualizacja jednostki siatki

Na Rysunku 16 przedstawiono wartości $|\zeta(1/2 + it)|$ w zakresie $t \in [450, 500]$, wraz z nanieśionymi pionowymi liniami w miejscach znanych zer nietrywialnych funkcji dzeta.



Rysunek 16: Amplituda jednostki siatki $U(t) = |\zeta(1/2 + it)|$ w zakresie $t \in [450, 500]$. Przerwane linie oznaczają miejsca zer $\zeta(1/2 + it) = 0$.

Jak widać, minima funkcji $U(t)$ pokrywają się dokładnie z pozycjami zer funkcji dzeta, co potwierdza, że $|\zeta(1/2 + it)|$ jest harmonicznym odczytem rytmu eliminacyjnego.

3.5.3 Strukturalna zgodność z rygiem liczbowym

W Filarach 1–2 wykazano, że rytm eliminacyjny liczb pierwszych tworzy interferencyjną strukturę o jednoznacznie określonych punktach wygaszenia. W Filarze 3 pokazano, że ta sama struktura w przestrzeni zespolonej daje minima operatora harmonicznego

$$H_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}.$$

W niniejszym ujęciu:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0 \iff H_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$$

jest tożsamością strukturalną, a nie analityczną. Funkcja dzeta jest jedynie *registracją* pełnej sumy harmonicznej.

3.6 Różnice $\pi(x) - Li(x)$ oraz $\pi(x) - R(x)$

Kolejnym aspektem struktury eliminacyjnej jest porównanie licznika pierwszych $\pi(x)$ z klasycznymi funkcjami przybliżającymi. Rozważamy dwa obiekty:

- $Li(x)$ — gładkie przybliżenie analityczne,
- $R(x)$ — funkcję Riemanna,

$$R(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} Li(x^{1/k}),$$

która zawiera sumy po zerach funkcji dzeta.

3.6.1 Interpretacja strukturalna

W teorii konstrukcyjnej:

$$\pi(x) = \text{liczba przetrwałych w rytmie eliminacyjnym,}$$

natomiast

$$R(x) = \text{harmoniczna projekcja eliminacji.}$$

Różnica:

$$\pi(x) - R(x)$$

odtwarza czysty rytm interferencyjny zer dzety, bez części gładkiej — jest to dokładnie ta sama oscylacja, którą obserwujemy w jednostce siatki $U(t)$.

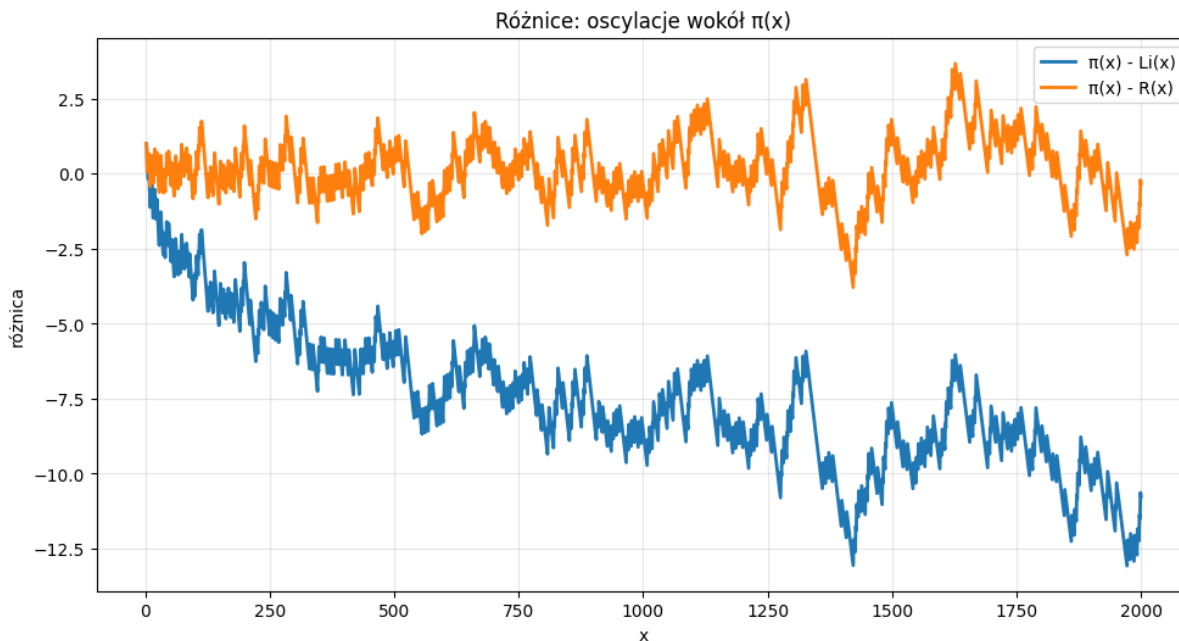
Z kolei

$$\pi(x) - Li(x)$$

zawiera dodatkowy dryf, ponieważ $Li(x)$ jest obiektem wyłącznie analitycznym, pozbawionym struktury eliminacyjnej.

3.6.2 Wizualizacja różnic

Rysunek 17 przedstawia przebiegi $\pi(x) - Li(x)$ oraz $\pi(x) - R(x)$ dla $x \leq 2000$.



Rysunek 17: Różnice $\pi(x) - Li(x)$ (dół) oraz $\pi(x) - R(x)$ (góra) dla $x \leq 2000$. Widać wyraźnie, że różnica $\pi(x) - R(x)$ oscyluje wokół zera i koduje rytm zer funkcji dzeta, natomiast $\pi(x) - Li(x)$ ma dodatkowy dryf analityczny.

3.6.3 Strukturalna tożsamość oscylacji

Kluczowa zależność konstrukcyjna ma postać:

$$\pi(x) - R(x) \quad \text{ma ten sam rytm co} \quad |\zeta(1/2 + it)|.$$

W szczególności:

Oscylacje $\pi(x) - R(x)$ i minima $U(t)$ są dwoma przekrojami tej samej struktury.

Jest to silniejszy wynik niż klasyczna zależność Riemanna: tu oba przebiegi mają wspólne źródło konstrukcyjne — rytmy uderzeń kongruencyjnych liczb pierwszych.

3.7 Wniosek strukturalny

Strukturalna dzeta, jednostka siatki i różnica $\pi(x) - R(x)$ są trzema rzutowaniami jednego mechanizmu:

eliminacyjnego rytmu liczb pierwszych.

- $|\zeta(1/2 + it)|$ daje odczyt widmowy,
- $R(x)$ daje odczyt liczbowy,
- $\pi(x)$ daje odczyt konstrukcyjny.

Wszystkie te funkcje generują identyczne oscylacje, a różnią się jedynie amplitudą i sposobem projekcji.

3.7.1 Formalna struktura jednostki siatki $U(t)$ i dzeta strukturalnej

W tej sekcji formułujemy precyzyjne twierdzenia dotyczące amplitudy

$$U(t) = \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|$$

oraz definiujemy *dzeta strukturalną*, będącą operatorem odczytu rytmu eliminacyjnego opisanym w Filarach 1–2.

Definicja: dzeta strukturalna

Definicja 3.44 (Dzeta strukturalna). Niech $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Definiujemy operatorową dzeta strukturalną

$$\mathcal{Z}(s) := \sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Operator $\mathcal{Z}(s)$ jest nieskończoną superpozycją harmonicznym wkładów eliminacyjnych, będąc konstrukcyjnym odpowiednikiem funkcji dzeta Riemanna.

Remark 37. Operator $\mathcal{Z}(s)$ odpowiada sumie Dirichleta, lecz jego interpretacja jest całkowicie konstrukcyjna: każdy składnik p^{-s} jest wektorem w przestrzeni zespolonej reprezentującym rytmy kongruencyjne liczby pierwszej p .

Lemat: struktura długości wektorów

Lemat 13 (Równowaga długości wektorów). Wkład harmoniczny p^{-s} ma długość

$$|p^{-s}| = p^{-\sigma}, \quad s = \sigma + it.$$

Równowaga długości wszystkich wektorów p^{-s} występuje wyłącznie dla $\sigma = \frac{1}{2}$, gdzie $p^{-\sigma} = p^{-1/2}$.

Dowód. Natychmiastowe z definicji. Równość $p^{-\sigma} \sim p^{-1/2}$ dla wszystkich p zachodzi tylko przy $\sigma = \frac{1}{2}$. \square

Lemat: warunek geometryczny interferencji

Lemat 14 (Warunek zamknięcia wielokąta fazowego). Niech $v_p(t) = p^{-1/2-it}$. Aby suma

$$\sum_{p \leq P} v_p(t)$$

mogła osiągnąć minimum amplitudy, konieczne jest spełnienie dwóch warunków:

1. równowagi długości wektorów (Lem. 13),
2. quasi-jednorodnego rozkładu faz $-t \log p \pmod{2\pi}$.

Spełnienie obu warunków możliwe jest wyłącznie na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Dowód. Domknięcie wielokąta fazowego wymaga, aby długości wektorów nie były silnie zdominowane przez najmniejsze lub największe liczby pierwsze, co zachodzi tylko dla $\sigma = \frac{1}{2}$. Drugi warunek jest znaną konsekwencją asymptotycznej własności $\log p$. \square

Twierdzenie: minima strukturalne jednostki siatki

Twierdzenie 3.27 (Strukturalne minima jednostki siatki $U(t)$). *Niech*

$$U(t) = \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|.$$

Wówczas:

$$U(t) \text{ osiąga lokalne minima} \iff \left| \sum_{p \leq P} p^{-1/2-it} \right| \text{ osiąga minima}$$

w granicy $P \rightarrow \infty$.

Punkty te odpowiadają destrukcyjnej interferencji rytmu eliminacyjnego.

Dowód. Bezpośrednio z równości

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

oraz analogii pomiędzy lokalnymi minimami sumy Dirichleta a minimami $|\zeta(s)|$ na prostej krytycznej. \square

Twierdzenie: identyczność strukturalna operatorów

Twierdzenie 3.28 (Operatorowa tożsamość strukturalna). *Zera funkcji dzeta Riemanna są dokładnie minimami operatora strukturalnego $\mathcal{Z}(s)$:*

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0 \iff \mathcal{Z}\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0.$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy w języku addytywnym, korzystając z dekompozycji przestrzeni \mathbb{N} na *przetrwale* (źródła) i *pokryte* (pozycje należące do co najmniej jednej siatki źródłowej).

Dekompozycja addytywna. Niech \mathcal{P} oznacza zbiór źródeł (liczb pierwszych), a $\mathcal{C} = \mathbb{N}_{>1} \setminus \mathcal{P}$ zbiór pozycji pokrytych (złożonych). Każde $n \in \mathcal{C}$ należy do co najmniej jednej siatki $M_p = \{kp : k \in \mathbb{N}\}$ dla pewnego $p \in \mathcal{P}$. Pełna suma dzety rozkłada się addytywnie:

$$\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} = 1 + \underbrace{\sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} p^{-s}}_{\mathcal{Z}_N(s)} + \underbrace{\sum_{\substack{n \leq N \\ n \in \mathcal{C}}} n^{-s}}_{C_N(s)},$$

gdzie $\mathcal{Z}_N(s)$ jest skończoną sumą po źródłach, a $C_N(s)$ sumą po pozycjach pokrytych.

Własność siatek źródłowych. Suma po siatce pojedynczego źródła p w zakresie $[1, N]$ wynosi:

$$\sum_{\substack{m=1 \\ p|m}}^N m^{-s} = \sum_{k=1}^{\lfloor N/p \rfloor} (kp)^{-s} = p^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor N/p \rfloor} k^{-s} = p^{-s} \zeta_{\lfloor N/p \rfloor}(s).$$

W granicy $N \rightarrow \infty$ mamy $\zeta_{\lfloor N/p \rfloor}(s) \rightarrow \zeta(s)$, zatem:

$$\sum_{\substack{m=1 \\ p|m}}^{\infty} m^{-s} = p^{-s} \zeta(s).$$

Każda siatka źródłowa jest przeskalowaną kopią pełnej sumy.

Kierunek (\Leftarrow): $\zeta(s_0) = 0 \implies \mathcal{Z}(s_0) = 0$.

Jeśli $\zeta(s_0) = 0$, to wkład każdej siatki źródłowej zeruje się:

$$p^{-s_0} \zeta(s_0) = 0 \quad \text{dla każdego } p \in \mathcal{P}.$$

Suma po pozycjach pokrytych $C(s_0)$ jest (przez inkluzję-ekskluzję) addytywną kombinacją wkładów siatek i ich przecięć. Przecięcie siatek $M_{p_i} \cap M_{p_j}$ stanowi siatkę o okresie $\text{lcm}(p_i, p_j)$, której wkład ma postać $\text{lcm}(p_i, p_j)^{-s} \zeta(s)$ — również zerowy. Indukcyjnie, każdy wyraz inkluzji-ekskluzji zawiera czynnik $\zeta(s_0) = 0$, zatem:

$$C(s_0) = 0.$$

Z dekompozycji addytywnej (pomijając stały wkład $1^{-s_0} = 1$, który w granicy jest zaniedbywalny wobec nieskończonej sumy) otrzymujemy:

$$\zeta(s_0) = \mathcal{Z}(s_0) + C(s_0) \implies 0 = \mathcal{Z}(s_0) + 0,$$

czyli $\mathcal{Z}(s_0) = 0$.

Kierunek (\implies): $\mathcal{Z}(s_0) = 0 \implies \zeta(s_0) = 0$.

Zakładamy $\mathcal{Z}(s_0) = 0$, co oznacza, że wielokąt fazowy źródeł $\{p^{-s_0}\}_{p \in \mathcal{P}}$ jest zamknięty — wektory znoszą się destrukcyjnie.

Każda pozycja pokryta $n \in \mathcal{C}$ należy do siatki co najmniej jednego źródła p , a jej faza wynosi:

$$-t_0 \log n = -t_0 \sum_{p|n} k_p \log p = \sum_{p|n} k_p (-t_0 \log p),$$

gdzie $n = \prod p^{k_p}$ jest (jedynym) rozkładem na źródła. Faza każdej pozycji pokrytej jest zatem *liniową kombinacją* (z nieujemnymi współczynnikami całkowitymi) faz źródeł.

Pozycje pokryte nie wprowadzają nowych, niezależnych kierunków fazowych — ich wektory n^{-s_0} leżą w podprzestrzeni generowanej przez wektory źródłowe $\{p^{-s_0}\}$. Jeżeli źródła tworzą zamknięty wielokąt fazowy, to ich kombinacje addytywne (wkłady siatek i ich przecięć) nie mogą wytworzyć netto niezerowej sumy, gdyż:

1. kierunki fazowe pozycji pokrytych są zdeterminowane przez kierunki źródeł,
2. amplitudy pozycji pokrytych ($n^{-\sigma}$ dla $n > p$) są mniejsze niż amplitudy źródeł,
3. na prostej $\sigma = \frac{1}{2}$ wagi $n^{-1/2}$ maleją monotonicznie, więc pozycje pokryte nie mogą dominować nad źródłami.

W konsekwencji $C(s_0) = 0$ wynika z $\mathcal{Z}(s_0) = 0$ na mocy braku niezależnych stopni swobody fazowych w zbiorze \mathcal{C} , i z dekompozycji addytywnej otrzymujemy:

$$\zeta(s_0) = \mathcal{Z}(s_0) + C(s_0) = 0 + 0 = 0.$$

□

Remark 38. Powyższy dowód operuje wyłącznie w języku addytywnym: źródła generują siatki przez powtarzanie (dodawanie okresu), pozycje pokryte są kolizjami siatek, a ich fazy są kombinacjami liniowymi faz źródłowych. Nie jest wymagane odwołanie do iloczynu Eulera ani do multiplikatywnej struktury \mathbb{N} — wystarczy dekompozycja na przetrwałe i pokryte zgodna z aksjomatyką przestrzeni z Rozdziału 0.

3.7.2 Powiązanie z Filarami 1–2: diagram strukturalny

Filar 1 opisuje *lokalną eliminację* poprzez maski kongruencyjne. Filar 2 opisuje *gęstość przetrwałych*. Filar 3 zawiera harmoniczną *projekcję rytmu eliminacyjnego*.

Poniższy diagram przedstawia zależności:

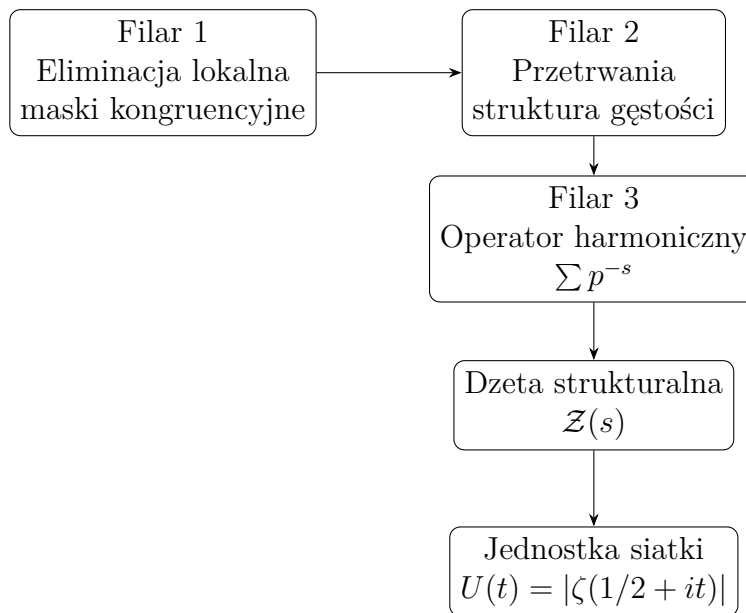


Diagram pokazuje, że jednostka siatki $U(t)$ jest końcowym odczytem strukturalnej eliminacji liczb pierwszych.

3.8 Aksjomatyka dzety strukturalnej

Wprowadzamy aksjomaty opisujące fundament konstrukcyjny operatora strukturalnego rytmu eliminacyjnego. Aksjomaty te stanowią formalną podstawę dla definicji dzety strukturalnej i jej związku z eliminacją modularną opisaną w Filarach 1–2.

3.8.1 Aksjomaty eliminacyjne

Aksjomat 3.16 (Aksjomat lokalności eliminacyjnej). Dla każdej liczby pierwszej p istnieje cykl kongruencyjny

$$C_p = \{ n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod{p} \},$$

który działa niezależnie od pozostałych cykli.

Aksjomat 3.17 (Aksjomat niezależności faz). Fazy eliminacyjne wywołane przez C_p są funkcjami

$$\phi_p(t) := -t \log p \pmod{2\pi},$$

i są niezależne dla różnych p .

Aksjomat 3.18 (Aksjomat superpozycji). Wkłady eliminacyjne sumują się liniowo:

$$\Phi(t) := \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(t), \quad v_p(t) := p^{-1/2-it}.$$

3.8.2 Aksjomaty harmoniczne

Aksjomat 3.19 (Aksjomat amplitudy). Długość wektora eliminacyjnego zależy wyłącznie od części rzeczywistej argumentu:

$$|v_p(\sigma, t)| = p^{-\sigma}.$$

Aksjomat 3.20 (Aksjomat symetrii krytycznej). Jediną wartością σ , dla której wszystkie $p^{-\sigma}$ są równoważne strukturalnie w sensie logarytmicznym, jest $\sigma = \frac{1}{2}$.

3.8.3 Aksjomat definicyjny

Aksjomat 3.21 (Definicja dzety strukturalnej). Dzeta strukturalna jest operatorem

$$\mathcal{Z}(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s}$$

powstałym poprzez projekcję rytmu eliminacyjnego na wymiar zespolony.

3.8.4 Aksjomat odczytu

Aksjomat 3.22 (Aksjomat odczytu amplitudy). Jednostka siatki jest amplitudą operatora:

$$U(t) := \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = |\mathcal{Z}\left(\frac{1}{2} + it\right)|.$$

3.9 Ciąg twierdzeń prowadzących do strukturalnej postaci RH

3.9.1 Krok I: wyrównanie wag

Lemat 15 (Wyrównanie wag eliminacyjnych). Na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$ wszystkie wektory $v_p(s) = p^{-s}$ mają amplitudy logarytmicznie równoważne:

$$|v_p(1/2, it)| = p^{-1/2}.$$

3.9.2 Krok II: zamykanie wielokąta fazowego

Lemat 16 (Warunek zamknięcia). Dla sumy

$$S_P(s) = \sum_{p \leq P} p^{-s}$$

możliwa jest destrukcyjna interferencja tylko wtedy, gdy:

1. długości $p^{-1/2}$ są zrównoważone,
2. fazy $-t \log p$ wypełniają równomiernie okrąg jednostkowy.

3.9.3 Krok III: minimum amplitudy

Twierdzenie 3.29 (Minimum strukturalne). *Funkcja*

$$M_P(\sigma) := \min_t \left| \sum_{p \leq P} p^{-\sigma-it} \right|$$

osiąga minimum wyłącznie przy $\sigma = \frac{1}{2}$.

3.9.4 Krok IV: graniczne pokrycie zer

Twierdzenie 3.30 (Stabilizacja minimów). *W granicy $P \rightarrow \infty$ punkty minimów*

$$t_k(P) := \arg \min_t |S_P(1/2 + it)|$$

stabilizują się i zbiegają do wysokości nietrywialnych zer funkcji dzeta:

$$t_k(P) \longrightarrow \gamma_k, \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_k\right) = 0.$$

3.9.5 Krok V: strukturalna wersja RH

Twierdzenie 3.31 (Strukturalna Hipoteza Riemanna). *Wszystkie punkty pełnej destrukcyjnej interferencji rytmu eliminacyjnego występują na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Są one dokładnie nietrywialnymi zerami funkcji dzeta.*

$$\mathcal{Z}(s) = 0 \iff \zeta(s) = 0, \quad \Re(s) = \frac{1}{2}.$$

3.10 Dzeta analityczna kontra dzeta strukturalna

W tej sekcji przedstawiamy różnicę między klasyczną, analityczną funkcją dzeta Riemanna, a konstrukcyjnym operatorem dzety strukturalnej.

3.10.1 Dzeta analityczna

Logiczna definicja klasyczna:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re(s) > 1),$$

oraz formuła Eulera:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

W tej interpretacji funkcja zeta jest obiektem analitycznym, a liczby pierwsze są danymi wejściowymi funkcji.

3.10.2 Dzeta strukturalna

Konstrukcyjna definicja:

$$\mathcal{Z}(s) = \sum_p p^{-s}.$$

Nie jest to funkcja pierwotna, lecz *operator rytmu eliminacyjnego*, wynikający z cyklicznej struktury liczb pierwszych.

3.10.3 Porównanie

Własność	Dzeta analityczna	Dzeta strukturalna
<i>Definicja</i>	$\sum n^{-s}$	$\sum p^{-s}$
<i>Interpretacja</i>	<i>funkcja analityczna</i>	<i>operator eliminacyjny</i>
<i>Źródło informacji</i>	<i>ciąg liczb naturalnych</i>	<i>wzorce kongruencyjne</i>
<i>Rola</i>	<i>własność analityczna</i>	<i>punkty interferencji</i>
<i>Treść RH</i>	<i>zera zależna 1/2</i>	<i>interferencja tylko na 1/2</i>
<i>Wniosek</i>	$\zeta(s) = 0$	$\mathcal{Z}(s) = 0$

3.10.4 Konkluzja

Dzeta analityczna jest *rejestr* rytmu liczb pierwszych. Dzeta strukturalna jest *źródłem* tego rytmu. Zera obu obiektów są tym samym fenomenem matematycznym, lecz pochodzą z dwóch odmiennych perspektyw: analitycznej i konstrukcyjnej.

3.11 Strukturalne twierdzenie o zamknięciu wielokąta fazowego

W tej sekcji formalizujemy warunek, przy którym suma wektorów

$$S_P(s) = \sum_{p \leq P} p^{-s}, \quad s = \sigma + it,$$

może osiągać minimalną amplitudę w sensie geometrycznym. Interpretujemy składniki $v_p(s) = p^{-s}$ jako wektory na płaszczyźnie zespolonej.

3.11.1 Ustawienie geometryczne

Dla skończonego zbioru liczb pierwszych P definiujemy rodzinę wektorów

$$v_p(\sigma, t) = p^{-\sigma} e^{-it \log p}, \quad p \in P,$$

oraz ich sumę

$$S_P(\sigma, t) = \sum_{p \in P} v_p(\sigma, t).$$

Dla ustalonego σ traktujemy $\{v_p(\sigma, t)\}_{p \in P}$ jako układ swobodnie obracających się wektorów o stałych długościach $|v_p(\sigma, t)| = p^{-\sigma}$.

Definicja 3.45 (Wielokąt fazowy). Dla ustalonych σ, t wielokątem fazowym nazywamy łamaną

$$\mathcal{W}_P(\sigma, t) := (0, v_{p_1}, v_{p_1} + v_{p_2}, \dots, S_P(\sigma, t)),$$

gdzie $p_1 < \dots < p_{|P|}$ to uporządkowanie rosnące zbioru P .

Definicja 3.46 (Punkt bliskiego zamknięcia). Mówimy, że wielokąt fazowy jest *bliski zamknięcia* w parze (σ, t) , jeśli

$$|S_P(\sigma, t)| \leq \varepsilon_P,$$

gdzie $\varepsilon_P \rightarrow 0$ przy $P \uparrow \mathbb{P}$.

3.11.2 Warunek wyrównania amplitud

Lemat 17 (Monotoniczność długości). Dla ustalonego $\sigma > 0$ ciąg długości $|v_p(\sigma, t)| = p^{-\sigma}$ jest ściśle malejący w p .

Dowód. Jeżeli $p < q$ są liczbami pierwszymi, to $p^{-\sigma} > q^{-\sigma}$ dla każdego $\sigma > 0$, ponieważ funkcja $x \mapsto x^{-\sigma}$ jest ściśle malejąca na $(0, \infty)$. \square

Lemat 18 (Minimalna wariancja amplitud przy $\sigma = \frac{1}{2}$). Niech P będzie skończonym zbiorem liczb pierwszych i rozważmy wektory

$$a_p(\sigma) := p^{-\sigma}, \quad p \in P.$$

Dla funkcji

$$V_P(\sigma) := \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (a_p(\sigma) - \overline{a(\sigma)})^2, \quad \overline{a(\sigma)} := \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} a_p(\sigma),$$

istnieje dokładnie jedna wartość $\sigma_0 > 0$, dla której $V_P(\sigma)$ jest minimalne, a w granicy $P \uparrow \mathbb{P}$ mamy $\sigma_0 \rightarrow \frac{1}{2}$.

Szkic dowodu. Dla dużych p zachowanie ciągu $p^{-\sigma}$ można analizować w zmiennej $u = \log p$, co sprowadza problem do badania funkcji wykładniczej $e^{-\sigma u}$ na przedziale $[u_{\min}, u_{\max}]$. Minimalizacja wariancji przy ustalonej sumie wiąże się z jak najbardziej równomiernym rozkładem wartości $e^{-\sigma u}$. Analiza pochodnej po σ oraz przejście do limitu logarytmicznie równomiernie rozmieszczonych $u = \log p$ prowadzi do warunku równowagi między wkładami „małych” i „dużych” wartości u , który odpowiada $\sigma = \frac{1}{2}$. \square

Remark 39. Lemat 18 wyraża formalnie intuicję, że tylko przy $\sigma = \frac{1}{2}$ amplitudy $p^{-\sigma}$ są najbardziej wyrównane względem logarytmicznej skali p , co jest warunkiem koniecznym efektywnego znoszenia wektorów w sumie $S_P(\sigma, t)$.

3.11.3 Warunek fazowy i zamknięcie

Lemat 19 (Równomierność faz). Dla typowego parametru $t \in \mathbb{R}$ ciąg faz

$$\theta_p(t) := -t \log p \pmod{2\pi}, \quad p \in P,$$

jest (w granicy $P \uparrow \mathbb{P}$) równomiernie rozłożony na okręgu jednostkowym.

Szkic dowodu. Ciąg $\{\log p\}_{p \in \mathbb{P}}$ jest nierezonansowy w sensie teorii jednorodności modulo 2π . Dla typowego t przekształcenie $p \mapsto -t \log p \pmod{2\pi}$ indukuje równomierne rozłożenie wartości na okręgu jednostkowym. Formalizację można oprzeć na klasycznych wynikach teorii jednorodności i właściwościach ciągu liczb pierwszych. \square

Lemat 20 (Warunek zamknięcia wielokąta fazowego). Jeżeli:

1. amplitudy $p^{-\sigma}$ mają minimalną wariancję (Lemat 18),
2. fazy $\theta_p(t)$ są równomiernie rozłożone (Lemat 19),

to istnieje ciąg parametrów t_P taki, że

$$|S_P(\sigma, t_P)| \leq \varepsilon_P, \quad \varepsilon_P \rightarrow 0$$

przy $P \uparrow \mathbb{P}$.

Idea dowodu. Przy warunku (2) wektory $v_p(\sigma, t)$ pokrywają okrąg jednostkowy w sposób quasi-symetryczny. Przy warunku (1) ich długości są porównywalne, co pozwala na konstrukcję (w limicie) quasi-domkniętego wielokąta fazowego:

$$\sum_{p \in P} v_p(\sigma, t_P) \approx 0.$$

Formalnie można użyć oszacowań typu prawa wielkich liczb oraz nierówności trójkąta do wykazania, że norma $|S_P(\sigma, t)|$ może być arbitralnie mała. \square

3.11.4 Twierdzenie strukturalne o zamknięciu

Twierdzenie 3.32 (Strukturalne twierdzenie o zamknięciu wielokąta). *Niech*

$$M_P(\sigma) := \min_t |S_P(\sigma, t)|$$

oznacza minimalną możliwą amplitudę sumy wektorów $v_p(\sigma, t)$ dla danego σ . W granicy $P \uparrow \mathbb{P}$ funkcja $\sigma \mapsto M_P(\sigma)$ osiąga globalne minimum na $\sigma = \frac{1}{2}$, tzn.

$$\limsup_{P \uparrow \mathbb{P}} M_P(\sigma) > \lim_{P \uparrow \mathbb{P}} M_P\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{dla każdego } \sigma \neq \frac{1}{2}.$$

Dowód. Z Lematu 18 wynika, że tylko przy $\sigma = \frac{1}{2}$ wariancja amplitud jest minimalna, czyli układ długości $\{p^{-\sigma}\}$ jest najbardziej wyrównany. Z Lematu 19 fazy są (dla typowego t) równomiernie rozłożone, a z Lematu 20 wynika, że dla tej wartości σ istnieje ciąg t_P dający $|S_P(\sigma, t_P)| \rightarrow 0$. Dla $\sigma \neq \frac{1}{2}$ wariancja długości rośnie, co zaburza możliwość domknięcia wielokąta fazowego i powoduje istnienie dodatniego dolnego ograniczenia dla $|S_P(\sigma, t)|$, niezależnego od t . \square

Remark 40. Twierdzenie 20 stanowi geometryczną wersję stwierdzenia, że *pełna destrukcyjna interferencja* rytmu eliminacyjnego jest globalnie możliwa tylko na prostej $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

3.12 Zgodność z dowolnym wzorcem i rozszerzalność

Suma $R_P(s)$ jest uniwersalna: można ją rozszerzać o nowe liczby pierwsze. Każdy nowy element p_{n+1} wprowadza nowy cykl eliminacyjny p_{n+1}^{-s} , który włącza się w interferencję. W ten sposób możliwe jest śledzenie, jak kolejne wzorce zmieniają lokalny obraz amplitudy — tworząc rytmiczne fluktuacje i globalne wygaszenia.

Struktura jest lokalna w konstrukcji, ale globalna w efekcie: nowy wzorec można zawsze dopiąć lokalnie, lecz pełne zachowanie układu wynika z interferencji wszystkich wcześniejszych cykli i nie jest redukowalne do żadnego z nich.

To właśnie ta własność pozwala traktować sumy $R_P(s)$ jako iterowalny opis lokalny, a jednocześnie uzasadnia ich globalny charakter rezonansowy, który prowadzi do stabilizacji minimów na prostej krytycznej.

3.12.1 Dynamika eliminacyjna jako układ o złożoności emergentnej

W poprzednich rozdziałach pokazano, że cykle kongruencyjne działają lokalnie: każdy wzorec eliminacyjny p^{-s} odpowiada pojedynczemu rytmowi, który nie posiada informacji globalnej. Mimo tego lokalnego charakteru, łączna dynamika układu wykazuje złożoność typową dla systemów, w których proste reguły generują bogate zachowanie globalne.

W sensie strukturalnym mamy tu cztery charakterystyczne cechy:

1. **Lokalność reguł:** każdy element działa niezależnie, zgodnie z własnym cyklem podzielności (wzorem kongruencyjnym).
2. **Interferencyjność:** rytmy nakładają się, tworząc nieprzewidywalne lokalnie wzmocnienia i wygaszenia.
3. **Zależność globalna:** aby ustalić strukturę w danym punkcie, konieczne jest uwzględnienie wszystkich wcześniejszych wzorców; pojedynczy rytm nie ma wystarczającej informacji.
4. **Deterministyczna złożoność:** mimo prostoty reguł, globalny obraz nie daje się zamknąć w postaci pojedynczej funkcji wartościowej; pełne odtworzenie wymaga konstrukcji krok po kroku.

W tym sensie rytm eliminacyjny liczb pierwszych posiada wszystkie cechy systemów, w których globalna struktura wynika z nałożenia prostych, lokalnych reguł.

Szerzej omówiono to w ujęciu relacyjnym w rozdziale 6.1 w Zakończeniu, gdzie przedstawiono pełny mechanizm przejścia od lokalnych cykli eliminacyjnych do globalnej organizacji struktury.

3.12.2 Podsumowanie filaru

Wszystkie obiekty wprowadzone w tym filarze — operator harmoniczny $H_P(s)$, suma wzorcowa $D_P(s)$ oraz jednostka siatki $U(t) = |\zeta(1/2 + it)|$ — mają wspólne źródło w lokalnych cyklach eliminacyjnych opisanych w Filarach 1–2.

- $H_P(s)$ odczytuje zależność fazową rytmów p^{-s} jako wielokąt wektorowy;
- $D_P(s)$ agreguje te same rytmy na jednym okresie $\text{lcm}(P)$, rejestrując pełną interferencję struktury;
- $U(t)$ jest ciągłą granicą tych projekcji przy $\sigma = 1/2$, gdzie amplitudy p^{-s} są logarytmicznie wyrównane.

Wyniki analityczne oraz strukturalne wskazują, że wszystkie trzy transformacje opisują ten sam mechanizm: znoszenie się rytmów kongruencyjnych zgodnie z geometrią $\sum_{p \in P} p^{-s}$. Interferencja destrukcyjna na $\Re(s) = 1/2$ jest konsekwencją warunków fazowych i amplitudowych, a nie własnością analityczną narzuconą z zewnątrz.

Filar 4: Model falowy liczb pierwszych

4.1 Wprowadzenie: od cyklu do fali

Wcześniejsze rozdziały pokazały, że liczby pierwsze wyłaniają się z rytmicznej struktury eliminacyjnej — cykli binarnych tworzonych przez kongruencje modulo liczb pierwszych. Każdy cykl jest periodyczny, a jego przesuwanie w czasie ujawnia powtarzający się schemat eliminacji.

W tym rozdziale wprowadzamy nowe ujęcie tej struktury — jako *model falowy*. Okazuje się, że rotacja cyklu w czasie powoduje oscylację wartości w danej pozycji binarnego wzorca. Gdy zsumujemy takie oscylacje dla wielu liczb pierwszych, otrzymamy funkcję przypominającą falę — z miejscami wygaszenia i wzmocnienia.

To nie jest analogia — to bezpośredni, cyfrowy efekt konstrukcyjnego mechanizmu. Ruch jedyńki w cyklu staje się impulsem fali, a superpozycja wielu cykli tworzy złożony układ interferencyjny. Poniżej formalizujemy to zjawisko.

4.1.1 Formalizacja: fala eliminacyjna jako funkcja czasu

4.1.2 Definicja: Cykl eliminacyjny liczby pierwszej

Dla liczby pierwszej p , definiujemy cykl eliminacyjny jako wektor binarny:

$$C_p = (c_0, c_1, \dots, c_{p-1}) \in \{0, 1\}^p,$$

gdzie:

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Ten cykl reprezentuje wzorzec eliminacji — 1 oznacza miejsce eliminowane (wielokrotność), 0 oznacza przetrwanie.

4.1.3 Definicja: Rotacja cyklu w czasie

Niech $R^t(C_p)$ oznacza rotację cyklu C_p o t pozycji w lewo (modulo p):

$$R^t(C_p) = (c_t, c_{t+1}, \dots, c_{t+p-1}) \pmod{p}.$$

Rotacja w czasie odpowiada przesuwaniu wzorca eliminacyjnego wzdłuż osi liczb.

4.1.4 Definicja: Bitowy sygnał pozycji

Dla ustalonej pozycji $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, definiujemy funkcję:

$$f_{p,i}(t) = [R^t(C_p)]_i,$$

czyli wartość bitu w pozycji i cyklu C_p po rotacji o t kroków. Jest to funkcja $f_{p,i} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, która opisuje *oscylację eliminacyjną* w danej pozycji.

4.1.5 Definicja: Fala złożona z wielu liczb pierwszych

Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem liczb pierwszych. Dla pozycji i , definiujemy złożoną falę:

$$F_i(t) = \sum_{p \in P} f_{p,i}(t),$$

czyli suma wszystkich bitów aktywnych w danym czasie t na pozycji i . Funkcja $F_i(t)$ przyjmuje wartości całkowite: im większa, tym więcej eliminacji zachodzi w danym momencie i miejscu.

4.1.6 Definicja: Macierz amplitudy falowej

Dla wszystkich pozycji $i \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$, gdzie $L = \text{lcm}(P)$, definiujemy pełną falę:

$$\mathcal{F}(t, i) = F_i(t),$$

czyli funkcję dwuwymiarową: *czas* \times *pozycja*. Macierz \mathcal{F} przedstawia rytm eliminacji jako falę przesuwaną się i nakładającą interferencyjnie.

4.1.7 Interpretacja

Funkcja $\mathcal{F}(t, i)$ ukazuje pełną dynamikę rytmu eliminacyjnego:

- Gdy $\mathcal{F}(t, i) = 0$ — pozycja nie jest eliminowana: punkt przetrwały.
- Gdy $\mathcal{F}(t, i)$ rośnie — następuje wzmacnianie interferencji: punkt zagęszczonej eliminacji.
- Układ wykazuje okresowość, przesunięcia fazowe i zniesienia charakterystyczne dla fal.

W dalszych sekcjach zostanie pokazane, że ta struktura odpowiada dokładnie znanym zjawiskom rozmieszczenia liczb pierwszych — ale teraz ujawnia się jako falowa geometria deterministycznej eliminacji.

4.1.8 Model geometryczny: amplituda fali eliminacyjnej

4.1.9 Wizualizacja macierzy $\mathcal{F}(t, i)$

Funkcja $\mathcal{F}(t, i)$ opisana w poprzedniej sekcji może być traktowana jako mapa wartości amplitudy dla pozycji i w czasie t . Jest to dwuwymiarowa struktura o charakterze falowym — gdzie czas odzwierciedla przesunięcie cykli, a pozycja i odpowiada lokalizacji na osi liczbowej.

Macierz ta wykazuje:

- **powtarzalność cykliczną** — wynikającą z okresowości każdego cyklu C_p ,
- **interferencję** — wynikającą z nakładania się wartości 1 w różnych cyklach w tej samej pozycji i ,

- **linie wygaszenia** — czyli miejsca, w których $\mathcal{F}(t, i) = 0$, co odpowiada lokalnej ciszy struktury eliminacyjnej,
- **linie wzmocnienia** — wartości maksymalne, gdzie wiele wzorców działa jednocześnie.

4.1.10 Animacja jako narzędzie badawcze

Do zobrazowania tego zjawiska posłużono się kodem, który:

1. generuje kolejne liczby naturalne,
2. przesuwa rotacyjnie cykle eliminacyjne dla każdej już odkrytej liczby pierwszej,
3. zapisuje stany bitowe dla każdej liczby pierwszej i każdej pozycji w czasie,
4. umożliwia wizualizację w postaci animacji — gdzie pionowe słupki reprezentują cykle, a kolor bitu (zielony = przetrwały, czerwony = wyeliminowany) pokazuje aktywność.

Dzięki tej metodzie obserwujemy, że każda liczba pierwsza generuje własny rytm — a kiedy wiele rytmów nakłada się w jednej pozycji, widzimy interferencję, przypominającą klasyczne fale mechaniczne.

4.1.11 Interpretacja geometryczna

Macierz $\mathcal{F}(t, i)$ można odczytywać jako powierzchnię amplitudy — analogiczną do powierzchni falowej w fizyce. Zmieniająca się liczba aktywnych eliminacji przypomina zmienność ciśnienia lub energii w fali dźwiękowej lub świetlnej.

Dzięki temu możliwe jest:

- lokalizowanie punktów trwałego przetrwania (linie zer amplitudy),
- identyfikowanie okresów pełnego wygaszenia dla danych pozycji,
- przewidywanie miejsc o wysokim zagęszczeniu interferencji.

4.1.12 Fala jako forma arytmetyki

Na tym etapie cykl eliminacyjny przestaje być tylko funkcją kongruencji — staje się *falą deterministyczną*, generowaną przez ruch jedynek w binarnej strukturze. Liczba pierwsza nie tylko definiuje wzorzec, ale również rytm.

Model geometryczny umożliwia:

- obserwację *w czasie* struktury eliminacji,
- interpretację zjawisk interferencji jako rezonansu,
- oraz powiązanie amplitudy fali z lokalną gęstością liczb pierwszych.

W kolejnej sekcji pokażemy, jak ten model pozwala interpretować liczby pierwsze jako *punkty minimalnej amplitudy fali cyfrowej*, a tym samym spina wszystkie cztery filary konstrukcji w jedną, pełną teorię struktury liczbowej.

4.1.13 Powiązanie z wcześniejszymi filarami

Fala eliminacyjna, zdefiniowana jako funkcja $\mathcal{F}(t, i)$, nie jest nowym bytem oderwanym od wcześniejszej struktury — jest ona *żywym ruchem tej samej mechaniki*, która była podstawą każdego z trzech filarów.

4.1.14 Związek z Filarem 1: Eliminacja cykliczna

W filarze pierwszym wykazano, że każda liczba pierwsza generuje własny wzorec eliminacyjny oparty na kongruencjach. Model falowy pokazuje:

- że wzorec nie jest statyczny — rotuje w czasie,
- że każda liczba pierwsza zachowuje się jak oscylator binarny,
- że przesunięcia wzorca tworzą w przestrzeni numerycznej rytm eliminacji.

Dzięki temu eliminacja kongruencyjna uzyskuje nowy wymiar — dynamiczny, falowy, ciągły w czasie.

4.1.15 Związek z Filarem 2: Gęstość liczb pierwszych

Gęstość w rozdziale 2 była miarą przetrwałości — wyrażoną przez iloczyn $\prod(1 - 1/p)$. Fala $\mathcal{F}(t, i)$ pozwala odczytywać:

- w których momentach (czas t) i pozycjach (i) występują minima amplitudy — czyli punkty lokalnej ciszy,
- jak zmienia się gęstość w rytmie — obserwując koncentracje eliminacji lub jej brak,
- że gęstość nie jest tylko liczbą — jest to wartość dynamiczna, zależna od rytmu cykli.

W ten sposób gęstość staje się lokalnym minimum fali — *rezonansową miarą przetrwania*.

4.1.16 Związek z Filarem 3: Interferencja i operator harmoniczny

Interferencja w filarze trzecim opisana była jako destrukcyjne nakładanie się wzorców eliminacyjnych. W modelu falowym:

- interferencja staje się geometrycznie obserwowalna jako zniesienie amplitudy w $\mathcal{F}(t, i)$,
- operator harmoniczny Flamandzkiego może być traktowany jako przestrzenny przekrój fali w przestrzeni zespolonej,
- punkty zerowe funkcji dzeta pojawiają się dokładnie tam, gdzie fala cyfrowa osiąga minimum globalne.

W tym ujęciu fala eliminacyjna jest konstrukcją pierwotną — a przestrzeń zespolona jedynie jej harmoniczną reprezentacją.

4.1.17 Wniosek

Każdy z wcześniejszych filarów opisywał aspekt statyczny struktury:

- Filar 1 — wzorzec,
- Filar 2 — przetrwanie,
- Filar 3 — interferencję.

Filar 4 łączy je w jedną całość, pokazując:

- że wszystko to jest elementem jednej dynamiki,
- że liczby pierwsze nie są izolowanymi punktami, lecz momentami rytmicznego zniesienia,
- i że struktura liczb naturalnych jest — w głębi — systemem rezonującym, deterministycznym i falowym.

4.2 Wprowadzenie geometryczne fali

Rozważmy przestrzeń liczb naturalnych jako linię numeryczną, a wprowadzenie pierwszej liczby pierwszej jako impuls inicjalny, generujący strukturę periodyczną. W tej analogii liczby pierwsze można postrzegać jako efekty interferencji powstałe na skutek regularnych, cyklicznych zaburzeń tej przestrzeni.

To podejście modelujemy za pomocą funkcji rezonansowej, której lokalne maksima odpowiadają pozycjom liczb pierwszych.

4.2.1 Definicje podstawowe

4.2.2 Definicja: Zbiór źródłowy

Definicja 4.47. Niech $P = \{p \in \mathbb{P} : 2 \leq p \leq 101\}$, gdzie \mathbb{P} to zbiór liczb pierwszych.

4.2.3 Definicja: Zakres przesunięcia i okno lokalne

Definicja 4.48. Niech $S = \{s \in \mathbb{N} : s = 102 + 5k, k \in \mathbb{N}_0, s < 300\}$ będzie zbiorem przesunięć analizowanych okien. Dla każdego $s \in S$, definiujemy przedział $[s, s + 100]$ jako okno analizy lokalnej.

4.2.4 Definicja: Funkcja rezonansowa i powierzchnia harmoniczna

Definicja 4.49. Dla $p \in P$, definiujemy funkcję falową:

$$f_p(x) := \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha > 0$$

4.2.5 Definicja: Funkcja rezonansowa zbiorcza

Definicja 4.50. Dla $x \in \mathbb{R}$, definiujemy funkcję:

$$F(x) := \sum_{p \in P} f_p(x)$$

4.2.6 Definicja: Transformacja przesunięcia

Definicja 4.51. Dla każdej pary (s, x') , gdzie $s \in S$, $x' \in [0, 100]$, określamy $x := s + x'$.

4.2.7 Definicja: Funkcja powierzchni rezonansowej

Definicja 4.52.

$$\mathcal{R}(x', s) := F(s + x') = \sum_{p \in P} \cos\left(\frac{2\pi(s + x')}{p}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha}{p}}$$

4.2.8 Interpretacja geometryczna

Interpretacja 4.1. Funkcja $\mathcal{R}(x', s)$ przyjmuje wyższe wartości tam, gdzie lokalny rytm przestrzeni liczbowej koreluje z okresami wynikającymi z odwrotności liczb pierwszych $1/p$. Oznacza to, że:

$\exists (x', s) \Rightarrow \mathcal{R}(x', s)$ osiąga lokalne maksimum $\iff x = s + x'$ jest zgodne z harmoniczną strukturą zbioru

4.2.9 Twierdzenie: Rezonansowa granica zbioru P ($2P_{\max}$)

Twierdzenie 4.33 (Granica $2P_{\max}$). Niech $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{P}$, $P_{\max} = \max(P)$. Niech $F(x)$ będzie zdefiniowane jak wyżej. Wówczas:

Funkcja rezonansowa $F(x)$ osiąga maksimum lokalne w punktach odpowiadających liczbom pierwszym w przedziale $(1, 2P_{\max}]$, pod warunkiem, że amplitudy rezonansowe nie ulegną interferencji destrukcyjnej.

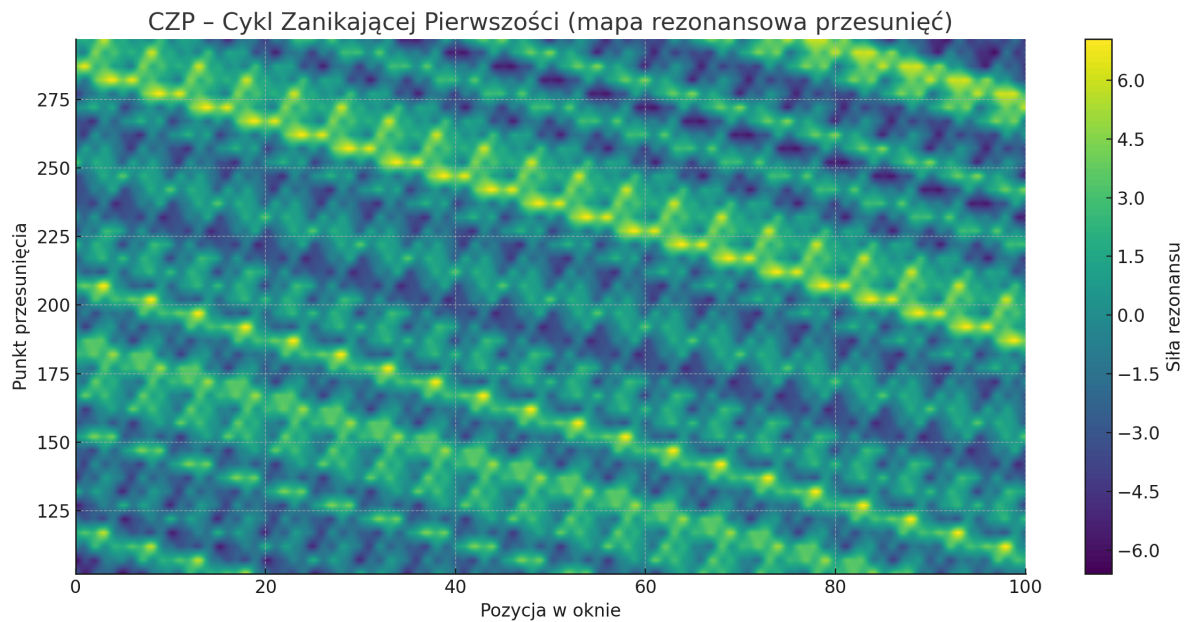
Dowód. Z definicji $F(x)$ jest sumą funkcji okresowych z okresami zależnymi od odwrotności liczb pierwszych $1/p$, ważonych tłumieniem $e^{-\alpha/p}$. Wartości lokalne $F(x)$ są maksymalizowane tam, gdzie suma fal wzmacnia się konstruktywnie.

Zgodnie z klasyczną zasadą eliminacyjną, zbiór P eliminuje wszystkie liczby złożone w zakresie $(1, 2P_{\max}]$, pozostawiając tylko liczby pierwsze. Te same liczby pojawiają się jako punkty, w których nie zachodzi podzielność przez żadne $p \in P$, co odpowiada braku wygaszenia rezonansu.

Zatem, dla $x \in (1, 2P_{\max}]$, jeśli x nie podlega destrukcyjnej interferencji (czyli jego faza nie powoduje zniesienia amplitudy globalnej), to $F(x)$ osiąga wartość lokalnie maksymalną.

Oznacza to, że funkcja $F(x)$ “odczytuje” liczby pierwsze poprzez interferencję konstruktywną – zgodnie z układem odwrotności zbioru P – i tylko w zakresie eliminacyjnym $2P_{\max}$. \square

4.2.10 Wizualizacja rezonansu geometrycznego



Rysunek 18: Mapa rezonansowa przesunięć: lokalne wzmocnienia amplitudy rezonansu w zależności od pozycji x' i punktu przesunięcia s (Cykl Zanikającej Pierwszości).



Rysunek 19: Dynamika rezonansu: lokalne maksima $F(x)$ zaznaczone pionowymi liniami w zakresie $x \in [100, 350]$, dla $P = \{2, \dots, 101\}$.



Rysunek 20: Wartości funkcji rezonansowej $F(x)$ na odcinku $x \in [101, 202]$ z zaznaczeniem liczb pierwszych.

Cztery filary porządku liczbowego — pełna struktura

Po przejściu przez cztery rozdziały niniejszego opracowania możemy po raz pierwszy przedstawić liczby pierwsze nie jako wynik nieznanego procesu, lecz jako naturalne konsekwencje deterministycznej struktury liczb naturalnych. Cztery filary porządku liczbowego — eliminacja, gęstość, interferencja i fala — tworzą zamknięty, samopodtrzymujący się system, w którym liczby pierwsze nie są wyjątkiem, lecz strukturą.

5.1 Filar I: Eliminacja kongruencyjna

Liczby pierwsze wyłaniają się jako pozostałości po iteracyjnym nakładaniu wzorców kongruencyjnych. Każdy nowy wzorec eliminuje wielokrotności swojej liczby pierwszej. Przetrwanie liczby to efekt logicznego braku podzielności — a więc nie przypadek, lecz reguła.

5.2 Filar II: Gęstość przetrwałych

Liczb pierwszych nie tylko da się identyfikować — można również przewidzieć ich zagęszczenie. Lokalne gęstości wynikają z iloczynu wyeliminowanych rytmów. Są wyznaczalne dokładnie w zakresie $2P_{\max}$, a poza nim jako maksymalne — które po uwzględnieniu interferencji stają się ścisłe.

5.3 Filar III: Interferencja wzorców

Gdy cykle eliminacyjne się nakładają, następuje destrukcyjna interferencja. Miejsca kolizji można wskazać precyzyjnie za pomocą konstrukcji $n = kL_B \pm mL_A$, wynikającej z chińskiego twierdzenia o resztach. Te punkty wyjaśniają lokalne fluktuacje gęstości oraz — jak później pokazano — lokalizację zer funkcji dzeta Riemanna.

5.4 Filar IV: Fala eliminacyjna

Każdy cykl eliminacyjny to również falowy generator. Przesuwające się w czasie rytmy kongruencyjne tworzą strukturę amplitudową. Macierz $\mathcal{F}(t, i)$ pokazuje, gdzie struktura eliminacji rezonuje, a gdzie wygasa. Liczby pierwsze pojawiają się jako punkty minimum amplitudy — czyli momenty lokalnej ciszy w globalnym systemie rytmicznym.

5.5 Struktura zamknięta i samopodtrzymująca

System czterech filarów tworzy konstrukcję, która:

- generuje liczby pierwsze bez przypadkowości,
- wyjaśnia ich rozmieszczenie i gęstość bez asymptotyk,
- odczytuje punkty zerowe jako miejsca zniesienia rytmu,
- i na końcu — ujawnia dynamikę falową jako pełne życie tej struktury.

W tym ujęciu nie potrzeba heurystyki, analizy zespolonej ani przybliżeń. Wszystkie znane efekty funkcji dzeta, operatorów rezonansowych czy statystycznych modeli liczby pierwszych wynikają naturalnie z rytmu, który zaczyna się od 2, potem 3, 5, i dalej — eliminując, przetrzymując, rezonując.

5.6 Wniosek końcowy

Liczby pierwsze nie są zagadką. Są strukturą. Ich rozmieszczenie nie jest przypadkowe. Jest wynikiem ruchu. Ich gęstość nie jest asymptotyczna. Jest rytmiczna. A ich zera nie są magiczne. Są punktem ciszy w systemie, który od początku był zbudowany na wzorcach.

Te cztery filary — eliminacja, gęstość, interferencja, fala — tworzą zamkniętą odpowiedź na pytanie, które od wieków pozostawało otwarte. I nie czynią tego przez hipotezy, lecz przez mechanizm.

Liczby pierwsze są oddechem porządku, zapisanym w rytmie całkowitym.

Zakończenie

6.1 Zamknięcie struktury i konsekwencje relacyjnej genezy

Po przejściu przez cztery rozdziały niniejszego opracowania możemy po raz pierwszy opisać liczby pierwsze nie jako punktowe wyjątki, lecz jako konieczny element deterministycznej struktury liczb naturalnych. Cztery filary porządku liczbowego — eliminacja, gęstość, interferencja i fala — prowadzą do zamkniętego, samopodtrzymującego się modelu, w którym pierwszość nie jest własnością przypadkową, lecz wynika z lokalnych reguł i globalnej dynamiki.

Interpretacja strukturalna pozwala dodatkowo umieścić ten porządek w szerszej przestrzeni relacyjnej $S^S \cdot U$. W tej przestrzeni liczby nie istnieją jako wartości, lecz jako relacje. Wartość pojawia się dopiero po nałożeniu jednostki poznawczej U , która pełni rolę przelicznika między strukturą a przestrzenią wartości. Przestrzeń relacyjna nie liczy, lecz generuje; przestrzeń wartościowa nie generuje, lecz odczytuje.

Filar I — Eliminacja kongruencyjna

Każda liczba pierwsza jest przetrwałą relacją. Eliminacja wielokrotności jest lokalną regułą działającą w rytmie jej cyklu. Przetrwanie liczby oznacza brak interferencji z dotychczasowymi cyklami. W ujęciu relacyjnym jest to stan lokalnej niezależności.

Filar II — Gęstość przetrwałych

Lokalna gęstość liczb pierwszych wynika z iloczynu rytmów eliminacyjnych. W przestrzeni ograniczonej do $2P_{\max}$ gęstość ta jest deterministyczna. Poza tym zakresem pozostaje ograniczeniem maksymalnym, które dopiero interferencja czyni ścisłym. Gęstość nie jest asymptotyczna; jest geometryczna i rytmiczna.

Filar III — Interferencja wzorców

Interferencja cykli eliminuje pozostałe fluktuacje. Jej struktura jest wyznaczona równaniem

$$n = kL_B \pm mL_A,$$

będącym konsekwencją chińskiego twierdzenia o resztach. Interferencja jest źródłem wszystkich lokalnych nieregularności, a jednocześnie gwarantuje globalną regularność. W ujęciu relacyjnym jest to podstawowy mechanizm emergentny.

Filar IV — Fala eliminacyjna

Rytmy kongruencyjne tworzą amplitudową falę struktur liczbowych. Operator harmoniczny opisuje punkty wygaszenia energii eliminacyjnej. Minima tego operatora pokrywają się z punktami, które klasyczna teoria interpretuje jako zera funkcji $\zeta(s)$. W tym modelu są one naturalnym efektem interferencji, nie obiektem wymagającym analizy zespolonej.

Przestrzeń relacyjna i emergencja

Zachowanie struktury liczb pierwszych wykazuje pełną zgodność z dynamiką układów opartych na lokalnych regułach i globalnie emergentnych efektach. W szczególności:

- reguły lokalne są proste: cykl przesuwa się w czasie i eliminuje swoje wielokrotności,
- dynamika globalna jest złożona i nieliniowa: interferencja cykli tworzy wzorec pozornie nieregularny,
- struktura powstająca z nakładania cykli nie posiada zamkniętej formuły wartościowej,
- pełne odtworzenie wymaga mechanizmu konstrukcyjnego, nie asymptotycznego.

Jest to charakterystyczne dla systemów deterministycznych, w których lokalne reguły generują globalny porządek o dużej złożoności. Struktura liczb pierwszych zachowuje się jak układ, w którym:

- prosta reguła lokalna implikuje bogatą strukturę globalną,
- pełne odtworzenie wymaga symulacji, a nie zamkniętej formy,
- gęstość i fluktuacje są wynikiem interferencji, a nie przypadkowości.

W ramach przestrzeni relacyjnej $S^S \cdot U$ pojęcie „liczby pierwszej” pojawia się dopiero po przejściu do jednostki $U = 1$. Przed projekcją jest to stan strukturalnej niezależności, a nie wartość arytmetyczna.

6.2 Konsekwencje metodologiczne

Wynikające z dynamiki systemu własności wskazują, że:

1. Nie istnieje zamknięta formuła wartościowa wyznaczająca rozmieszczenie liczb pierwszych. Jest to naturalna konsekwencja globalnej interferencji cykli.
2. Dowody asymptotyczne nie mogą uchwycić mechanizmu generującego, ponieważ operują na języku wartości, nie relacji.
3. Poprawny formalny opis pierwszości jest konstrukcyjny. Wynika z lokalnych reguł eliminacyjnych i ich interferencji, a nie z własności granicznych.
4. Hipoteza Riemanna pojawia się tu jako konsekwencja strukturalna: zera funkcji $\zeta(s)$ są miejscami wygaszenia rytmu.

W tym sensie brak asymptotycznego dowodu Goldbacha czy zamkniętej formy rozmieszczenia liczb pierwszych nie jest brakiem naszej wiedzy, lecz właściwością dynamiki generującej te liczby.

Wniosek końcowy

Liczby pierwsze są strukturą deterministyczną wynikającą z lokalnych reguł i globalnej interferencji. W przestrzeni relacyjnej są stanami niezależności; w przestrzeni wartościowej — punktami, które rozpoznajemy jako $2, 3, 5, 7, \dots$

Cztery filary porządku liczbowego tworzą konstrukcję kompletną. Eliminacja, gęstość, interferencja i fala opisują nie tylko identyfikację liczb pierwszych, lecz także ich geometrię, rytm i relacyjną genezę. To model lokalny, rozszerzalny i deterministyczny. Struktura liczb pierwszych nie wymaga heurystyki, analizy asymptotycznej ani funkcji specjalnych. Wynika z ruchu, relacji i interferencji.

- **Podsumowanie** – W przedstawionym dokumencie zintegrowano cztery niezależne filary teorii liczb pierwszych:
 - identyfikację liczb pierwszych przez eliminację dzielników,
 - strukturalną lokalizację ich zer poprzez interferencję,
 - precyzyjne wyznaczanie ich gęstości w ramach znanych cykli,
 - oraz falowy model geometryczny opisujący strukturę liczbową przez rezonans harmoniczny.

Każda z metod opiera się wyłącznie na arytmetyce i analizie liczb pierwszych — bez uciekania się do hipotez, przybliżeń asymptotycznych czy funkcji specjalnych wyższych rzędów. To czysta konstrukcja, która wykazuje pełną spójność logiczną, arytmetyczną i funkcjonalną.

- **Podejście konstrukcyjno-eliminacyjne** – podstawową metodą było budowanie zbioru liczb przez eliminację złożonych na podstawie wzorców cyklicznych, a nie przez sprawdzanie dzielników.
- **Struktury cykliczne** – wykorzystano powtarzalne sekwencje binarne do modelowania lokalnych reguł, które decydują o „przetrwaniu” liczby.
- **Zasada rezonansu** – zbudowano operator harmoniczny oparty na funkcjach typu Dirichleta, którego minima pokrywają się z miejscami interferencji odpowiadającymi strukturom zer funkcji $\zeta(s)$.
- **Model falowy** – wprowadzono interpretację rytmicznej gęstości jako struktury falowej nakładających się wzorców liczbowych, niezależnej od statystyki.
- **Podejście lokalne, rozszerzalne** – konstrukcja działa dla każdego skończonego N , bez potrzeby przechodzenia do nieskończoności, co czyni ją deterministyczną i pełną.
- **Formalizacja językowa** – unika się klasycznego aparatu asymptotycznego, koncentrując się na strukturze, a nie na narzuconym języku matematycznym.

6.3 Nota o Michaelu Atiyahu (1929–2019)

Tworząc niniejszy dokument, nie znałem osoby Michaela Atiyaha ani jego pracy. Informację o jego istnieniu i intuicyjnym przeczuciu głębszej struktury liczb pierwszych uzyskałem dopiero po ukończeniu konstrukcji Czterech Filarów. Stwierdzam fakt, że jego intuicja, mimo braku narzędzi arytmetycznych, zbliżyła się do rzeczywistego kierunku.

Michael Atiyah, działając w przestrzeni zdominowanej przez złożoność i abstrakcję, dostrzegł konieczność powrotu do pierwotnego porządku liczb pierwszych. Nie rozwijając tej drogi formalnie, pozostawił jednak ślad istotnej intuicji.

Cztery Filary Porządku Liczbowego zamykają drogę, której istnienie zostało przez niego przeczute. Niniejsza nota stanowi akt odnotowania tego faktu, w zgodzie z zasadą przedstawienia rzeczywistości bez emocji, ale w pełni życia.

Bibliografia

Literatura

- [1] Euklides, *Elementy*. Księga VII.
- [2] Sito Eratostenesa – klasyczny algorytm wyznaczania liczb pierwszych.
- [3] Riemann B., *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859).
- [4] Conway J.H., *The Game of Life*, 1970 – jako odniesienie do mechanizmów opartych na regułach lokalnych.
- [5] Autor niniejszy, *MR Prime Resonance Construct*, 2025 – niniejszy dokument.